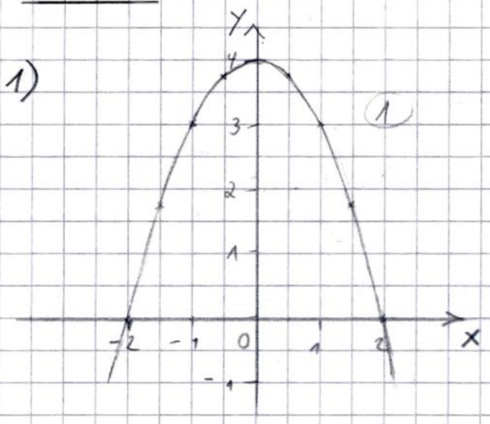
ABI 2011

Analysis
Aufgabengruppe II

Teil 1

1)



(1)

(1,5) $A = 2 \cdot \int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

(1) $= 2 \cdot \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$= 2 \cdot \left(4 \cdot 2 - \frac{1}{3}2^3 - 4 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0^3\right)$

$= 2 \cdot \left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$ FE

(1,5)

(5)

2) $f(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$

1 $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$

1 $F(x) = 3 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C = 2x^{\frac{3}{2}} + C$

2 $F(1) \overset{!}{=} 4 \iff 2 \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C = 4 \iff C = 2$

(4) $\Rightarrow F(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2$

3) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) (1)

(3) a) $f(x) \overset{!}{=} 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\notin \mathbb{D}$

1 b) Symmetrie: $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2} = \frac{-\sin x}{x^2} = -f(x)$

1 $\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\sin x}^{\in[-1;1]}}{\underbrace{x^2}_{\to +\infty}} = 0$

(3)

(2) c) $f'(x) = \frac{x^2 \cdot \cos x - \sin x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$

4) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

(3) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 2$

Teil 2

1) $f(x) = 6 \cdot e^{-0,5x} + x \qquad D_f = \mathbb{R}$

a) $f'(x) = 6e^{-0,5x} \cdot (-0,5) + 1 = -3e^{-0,5x} + 1$ 2

$f''(x) = -3e^{-0,5x} \cdot (-0,5) = 1,5\, e^{-0,5x}$ 1

Monotonie: $f'(x) > 0$

$\Leftrightarrow -3e^{-0,5x} + 1 > 0 \Leftrightarrow -3e^{-0,5x} > -1$

$\Leftrightarrow e^{-0,5x} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -0,5x < \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0,5} \Leftrightarrow x > -2\ln\left(\frac{1}{3}\right) = 2\ln 3 \approx 2,20$ 2

analog: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \approx 2,20$

$\Rightarrow$ f ist streng monoton zunehmend für $x \in [2\ln 3; +\infty[$

f ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; 2\ln 3]$ 1,5

Extrempunkt: wegen $f'(x) = 0$ für $x = 2\ln 3$ (analog)

und Vorzeichenwechsel von f' bei $x = 2\ln 3$

von $-$ nach $+$

und $f(2\ln 3) = 6e^{-0,5 \cdot 2\ln 3} + 2\ln 3$

$= 6e^{-\ln 3} + 2\ln 3 = 6 \cdot \frac{1}{3} + 2\ln 3 = 2 + 2\ln 3$

gilt: $TIP(2\ln 3 \mid 2 + 2\ln 3)$ 2

Krümmung: Da $f''(x) = \underbrace{1,5}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{>0} > 0$ gilt 1,5

G_f ist linksgekrümmt auf $D_f = \mathbb{R}$

(10)

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\underbrace{6 \cdot e^{\overset{\to +\infty}{-0,5x}}}_{\to +\infty} + \underbrace{x}_{\to -\infty} \right) = +\infty$ (e^x wächst viel schneller) 1

$f(x) = 6e^{-0,5x} + x = \underbrace{\frac{6}{e^{0,5x}}}_{\to 0 \text{ für } x \to +\infty} + \overbrace{x}^{g(x)} \Rightarrow$ 1

$\Rightarrow g(x) = x$ ist schräge Asymptote 1

(3)

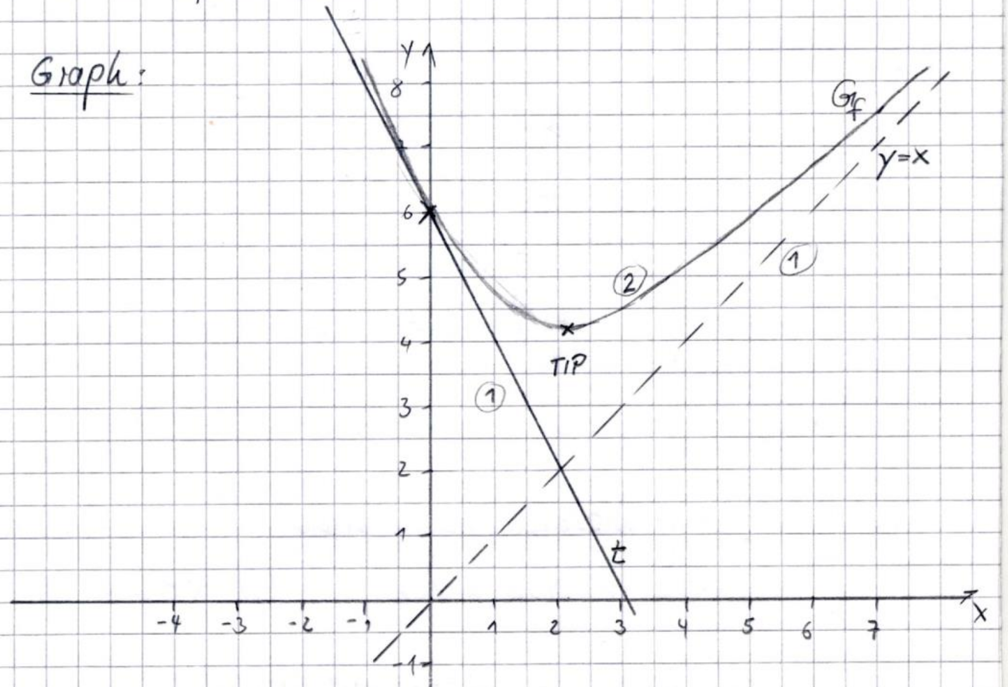
c) $P(0|6)$, $m = f'(0) = -3e^{-0,5\cdot 0} + 1 = -3 + 1 = -2$

$\Rightarrow$ Tangente: $y = m \cdot x + t$

$6 = -2 \cdot 0 + t \Rightarrow t = 6$

2 $\Rightarrow t: y = -2x + 6$

Graph:



4

(6)

2) $k(x) = 6e^{-0,5x} + 1,5$

1 **a)** $e^{-0,5x}$: Spiegelung an der y-Achse und

1 Streckung mit dem Faktor 2 entlang der x-Achse

1 $6e^{-0,5x}$: Streckung mit dem Faktor 6 entlang der y-Achse

(4) 1 $6e^{-0,5x} + 1,5$: Verschiebung an der y-Achse um 1,5 LE nach oben

b) Da G_k streng monoton fällt bis zu dem Grenzwert 1,5, sinkt die momentane Schadstoffausstoßrate nach dem Einschalten bis zu einem Wert von $1,5 \frac{mg}{min}$

(3)

c) $A = \int_0^5 \left(6e^{-0,5x} + 1,5\right) dx = \left[6 \cdot (-2) e^{-0,5x} + 1,5x\right]_0^5$

$= -12 \cdot e^{-2,5} + 7,5 - (-12 + 0) = -12e^{-2,5} + 19,5 \approx 18,51$

In den ersten 5 Sekunden stößt die Maschine 18,51 mg Schadstoffe aus.

(6)

3) $f_a(x) = 6e^{-0,5x} - a \cdot x \qquad a \in \mathbb{R}^+ , \; \mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$

a) <u>Schnittpunkt mit der y-Achse:</u>

$f_a(0) = 6e^{-0,5 \cdot 0} - a \cdot 0 = 6e^0 = 6$ unabhängig von a

$\Rightarrow$ alle Graphen G_a enthalten den Punkt $(0|6)$ 2

<u>Monotonie:</u> $f_a'(x) = 6e^{-0,5x} \cdot (-0,5) - a = \underbrace{-3\underbrace{e^{-0,5x}}_{>0}}_{<0} - \underbrace{a}_{>0} < 0$

$\Rightarrow$ alle Graphen G_a fallen streng monoton auf ganz $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{6\underbrace{e^{-0,5x}}_{\to 0}}_{\to 0} - \underbrace{\underbrace{a \cdot x}_{\to +\infty \; (a>0)}}_{\to -\infty} \right) = -\infty$ 1

5

b) $x_0 = 0$

$x_1 = x_0 - \frac{f_a(x_0)}{f_a'(x_0)} = 0 - \frac{f_a(0)}{f_a'(0)} = -\frac{6}{-3-a} = \frac{6}{3+a}$ 3

1 1,5 0,5