# ABI 2011

Geometrie
Aufgabengruppe I

$A(0|60|0)$ $B(-80|60|60)$ $C(-80|0|60)$

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (-3600) \\ -4800 - (-4800) \\ 4800 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 0 \\ 4800 \end{pmatrix} = 1200 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} -80 & -80 \\ 0 & -60 \end{matrix}$

2 $\Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ NF: $\left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

1 $\Leftrightarrow 3x_1 + 4x_3 = 0$

1 Die Ebene E enthält die $x_2$-Achse!

Normalenvektor der $x_1x_2$ Ebene: $\vec{n}_{x_{13}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_{x_{13}}}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{x_{13}}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{1}} = \frac{4}{5}$

2 $\Rightarrow \varphi = \arccos(0{,}8) \approx 36{,}87°$

8


b) $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{CB} = \begin{pmatrix} -80 - (-80) \\ 60 - 0 \\ 60 - 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{OA} = \vec{CB}$

$\rightarrow$ gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang

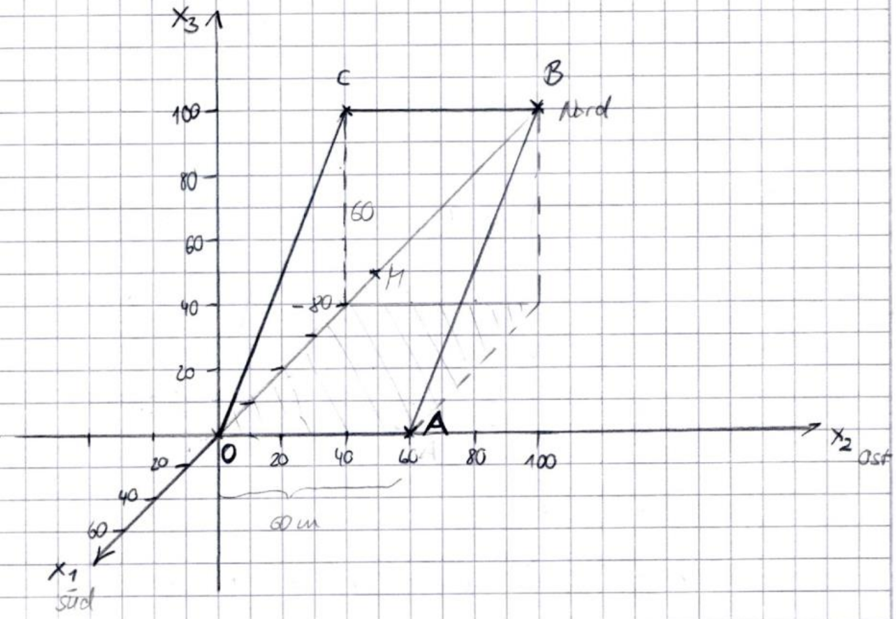
2

1 $\vec{OA} \circ \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{OA} \perp \vec{OC}$

$\Rightarrow$ OABC ist ein Rechteck

$\left( \vec{AB} = \begin{pmatrix} -80 - 0 \\ 60 - 60 \\ 60 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \vec{OC} \right)$

1 $A_2 = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OC}| = \sqrt{3600} \cdot \sqrt{6400 + 3600} = 60 \cdot 100 = 6000$ FE



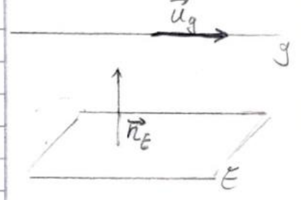

2

(6)

c) Das Grundbuchamt projeziert das Grundstück in die $x_1x_2$-Ebene und berechnet davon den Flächeninhalt!

$\Rightarrow A_{R\,projeziert} = 60 \cdot 80 = 4800\ FE$ (3)

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$




zz $g \parallel E$ ; $d(g, E) = 20\ LE$

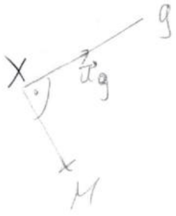
$g \parallel E \iff \vec{u}_G \perp \vec{n}_E$

$\vec{u}_G \circ \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 12 + 0 - 12 = 0 \Rightarrow u_G \perp n_E \Rightarrow g \parallel E$ 1

HNF von E: $\frac{3x_1 + 4x_3}{5} = 0$, $|\vec{n}_E| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$d(g, E) = \left| \frac{3 \cdot (-20) + 4 \cdot 40}{5} \right| = \left| \frac{-60 + 160}{5} \right| = 20\ LE$ 2

(3)




e) $M(-40|30|30)$

minimale Entfernung: Lot von M auf g

$\overrightarrow{MX} \perp \vec{u}_G \iff \overrightarrow{MX} \circ \vec{u}_G = 0$

$\iff \begin{pmatrix} x_1 - (-40) \\ x_2 - 30 \\ x_3 - 30 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$

$4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 160 - 150 + 90 = 0$

1 $4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 100 = 0$ $\quad X \in g: \begin{cases} x_1 = -20 + 4\lambda \\ x_2 = 40 + 5\lambda \\ x_3 = 40 - 3\lambda \end{cases}$

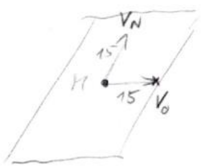
1 $\Rightarrow 4(-20 + 4\lambda) + 5(40 + 5\lambda) - 3(40 - 3\lambda) + 100 = 0$

$-80 + 16\lambda + 200 + 25\lambda - 120 + 9\lambda + 100 = 0$

$50\lambda + 100 = 0$

1 $\Rightarrow \lambda = -2$

(5) 2 $\Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} -28 \\ 30 \\ 46 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{MX}| = \left| \begin{pmatrix} -28 + 40 \\ 30 - 30 \\ 46 - 30 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$




f) $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{OC}| \overset{b)}{=} 100 \Rightarrow \overrightarrow{OC}^0 = \frac{1}{100} \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OV_N} = \vec{M} + 15 \cdot \overrightarrow{OC}^0 = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + 15 \cdot \frac{1}{100} \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 30 \\ 39 \end{pmatrix}$

3 $\Rightarrow V_N(-52|30|39)$

$\overrightarrow{OV_0} = \vec{M} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix}$

(5) 2 $\Rightarrow V_0(-40|45|30)$