ABI 2011

Geometrie
Aufgabengruppe II

$A(1|7|3)$; $B(6|-7|1)$; $C(-2|1|-3)$

a) $\vec{CA} \circ \vec{CB} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 7-1 \\ 3-(-3) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6-(-2) \\ -7-1 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 24-48+24 = 0$

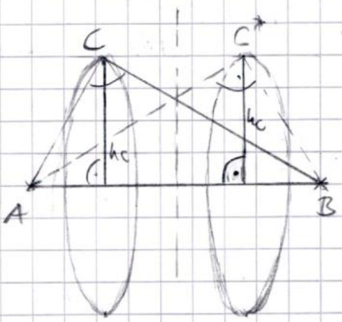
$\Rightarrow \vec{CA} \perp \vec{CB}$ $\Rightarrow$ ΔABC hat einen rechten Winkel bei C und die Hypothenuse [AB]

$\overline{AC} = |\vec{CA}| = \sqrt{3^2+6^2+6^2} = \sqrt{81} = 9$ LE

$\overline{BC} = |\vec{CB}| = \sqrt{8^2+(-8)^2+4^2} = \sqrt{144} = 12$ LE

$\Rightarrow$ [AC] ist die kürzere Kathete mit $\overline{AC} = 9$ LE

b)



Die Kreise entstehen durch Rotation des Punktes C um die Achse AB bzw durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten zu [AB] und anschließender Rotation um AB

Der Radius der Kreise entspricht der Höhe h_c des ΔABC

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$

$\overline{AB} = \sqrt{9^2+12^2} = \sqrt{225} = 15$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot h_c = 54$

$h_c = 54 : 7{,}5 = 7{,}2 \text{ LE} = r$

c) $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56-(-16) \\ 16-(-20) \\ 40-112 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \\ -72 \end{pmatrix} = 36 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 - 2x_3 - (2+7-6) = 0$

$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$

d) $S(11{,}5|4|-6)$

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 11{,}5-6 \\ 4-(-7) \\ -6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \frac{\begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{5{,}5^2+11^2+(-7)^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{11+11+14}{\sqrt{200{,}25} \cdot 3} = \frac{36}{\sqrt{200{,}25} \cdot 3} = \frac{12}{\sqrt{200{,}25}}$$

$$\arccos\left(\frac{12}{\sqrt{200{,}25}}\right) \approx 32{,}0^\circ$$

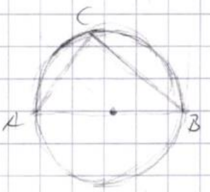
$$\Rightarrow \measuredangle(\overrightarrow{BS}; E) = 90^\circ - 32{,}0^\circ = 58{,}0^\circ$$

$$V_{Py} = \frac{1}{6} \cdot \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AS} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \\ -72 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |72 \cdot 10{,}5 - 36 \cdot 3 + 72 \cdot 9| = \frac{1}{6} \cdot |1296| = 216 \text{ VE}$$

e) Die Gerade g muss parallel zur Ebene E liegen im Abstand der Höhe h_{Py} der Pyramide, also dem Abstand von S zur Ebene E, da $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Py}$ und bei gleicher Grundfläche $G = \Delta ABC$ auch die Höhe gleich bleiben muss für ein gleiches Volumen.

f)



Mittelpunkt des Grundkreises $\hat{=}$ Mittelpunkt von [AB] (Thaleskreis über [AB])

$$M_{[AB]} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lot l auf E durch S:

$$l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 11{,}5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 11{,}5 + 2\tau \\ x_2 = 4 + \tau \\ x_3 = -6 - 2\tau \end{cases}$$

l in E: $2(11{,}5 + 2\tau) + 4 + \tau - 2(-6 - 2\tau) - 3 = 0$

$$23 + 4\tau + 4 + \tau + 12 + 4\tau - 3 = 0$$

$$9\tau = -36 \Rightarrow \tau = -4$$

τ in ℓ: $\begin{pmatrix} 11{,}5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}5-8 \\ 4-4 \\ -6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{M}_{[AB]}$

$\Rightarrow$ S liegt senkrecht über dem Grundkreismittelpunkt

$\Rightarrow$ der Kegel ist gerade

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G_K \cdot h_K = \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi \cdot |\overrightarrow{M_{[AB]}S}|$

$= \frac{1}{3} \cdot 7{,}5^2 \pi \cdot \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3} \cdot 56{,}25\pi \cdot \sqrt{8^2+4^2+(-8)^2}$

$= 225\pi \approx 706{,}9$ VE

$\frac{V_{Kegel}}{V_{Pyramide}} = \frac{706{,}9}{216} \approx 3{,}27$

$\Rightarrow$ Das Volumen des Kegels ist ca um 227% größer als das Volumen der Pyramide.