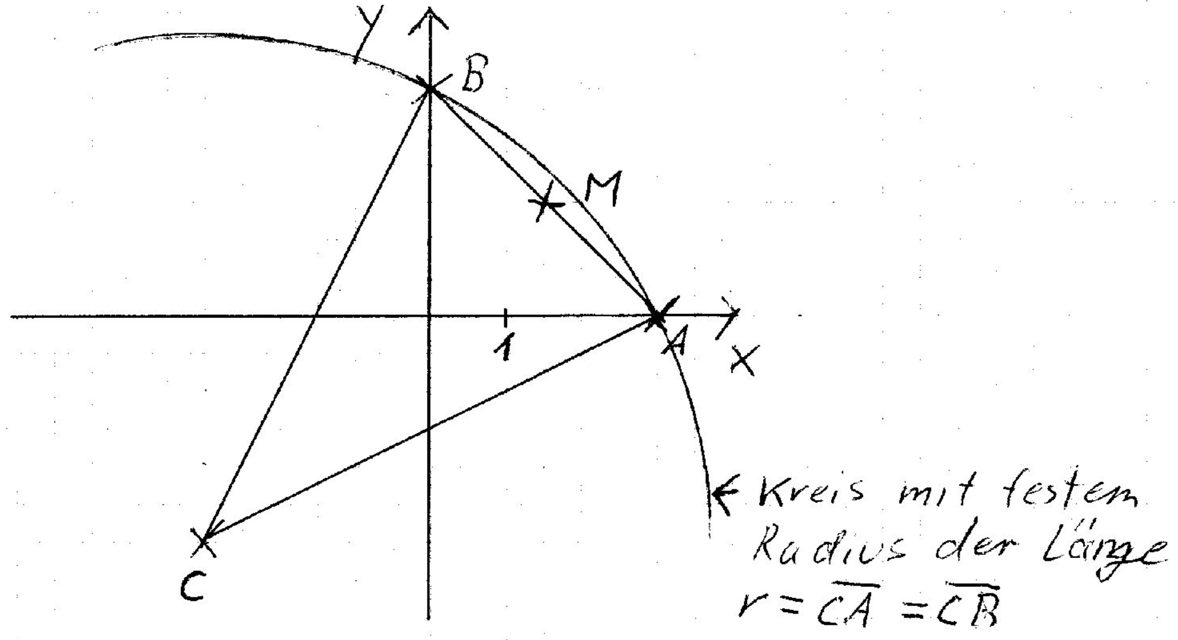
GM3 Analytische Geometrie
Aufgabengruppe V.

Punkte: $A(3|0|0)$; $B(0|3|0)$; $C(-3|-3|0)$; $S(0|0|6)$

Nr 1 a)



Nachweis für „Gleichschenklichkeit:
Die Punkte A und B liegen beide auf einem Kreis mit festem Radius um C als Mittelpunkt.

$A_{\Delta ABC}$: $\frac{1}{2} \cdot g \cdot h = A_\Delta$

Grundlinie: $\overline{AB}$

$\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

Höhe: $\overline{CM}$

$M = \frac{1}{2} \cdot \vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{CM}| = |\vec{C} - \vec{M}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -4{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4{,}5)^2 + (-4{,}5)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

$A = \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{2} = \underline{\underline{13{,}5 \text{ FE}}}$

Nr 1 b) Blatt 2

S als Aufpunkt; $\overrightarrow{SA}$ und $\overrightarrow{SB}$ als Richtungsvektoren

$$E(x) = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3 - 0\\0 - 0\\0 - 6\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0 - 0\\3 - 0\\0 - 6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\-6\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\\-6 & -6\\3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix} = \begin{matrix}(0 \cdot (-6)) - (3 \cdot (-6))\\((-6) \cdot 0) - (3 \cdot (-6))\\(3 \cdot 3) - (0 \cdot 0)\end{matrix} = \begin{pmatrix}18\\18\\9\end{pmatrix}$$

$$E(x) = \begin{pmatrix}18\\18\\9\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\right]$$

$$E(x) = 18 \cdot x_1 - 0 + 18 \cdot x_2 - 0 + 9 \cdot x_3 - 9 \cdot 6$$
$$= 18x_1 + 18x_2 + 9x_3 - 54$$
$$= 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6$$

Nr 1 c)

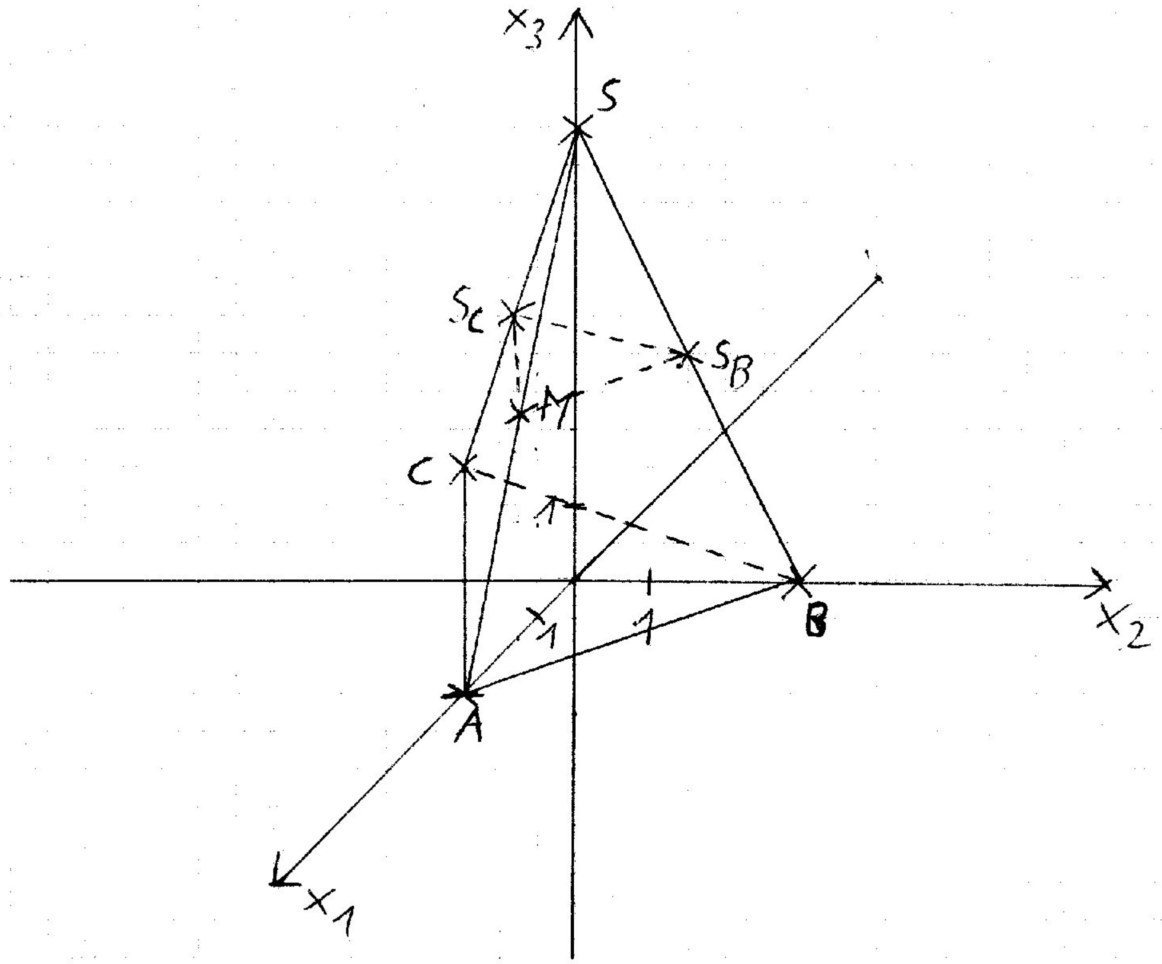
$$\text{hess } E(x) = \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6}{3}$$

NR: $\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = |\vec{n}| = \sqrt{9} = 3$

$$d: \ C \text{ in hess } E(x) = \frac{2(-3) + 2(-3) + 0 - 6}{3}$$
$$= \frac{-6 - 6 - 6}{3} = -\frac{18}{3} = -6$$

$$d = |-6| = \underline{\underline{6}}$$

Veranschaulichungszeichnung

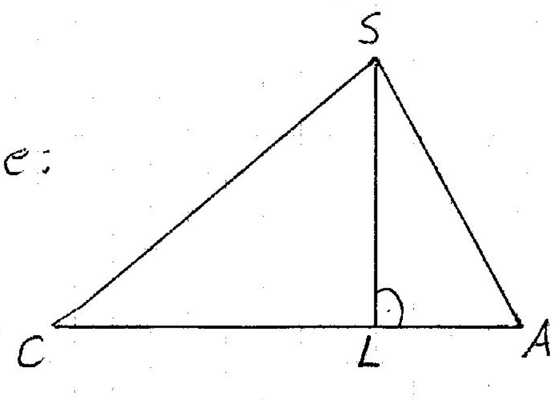


Vom Punkt C, da umso weiter der Startpunkt der Grundfläche ABC von S entfernt liegt, umso spitzer ist der Winkel von S zur x_1x_2-Ebene auf der AB und C liegen. C ist am weitesten von S entfernt (siehe Skizzen Nr 1a und 2a).

$$|\overline{CS}| = |\vec{s} - \vec{c}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}+3\\+3\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(3)^2+(3)^2+(6)^2} \approx \underline{\underline{3{,}78\,LE}}$$

ⓑ

Sizze:



Kürzeste Entfernung
$= \text{Lot auf } \overline{AC}$
L = Lotfußpunkt

Nr 2b) Fortsetzung

$\cancel{\overrightarrow{CA}} \circ \cancel{\overrightarrow{LS}} = 0$

$\overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{SL}$

$$g_{AC}(x) = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Einsetzen für L

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} l_1 - 0 \\ l_2 - 0 \\ l_3 - 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (3 + r \cdot (-6)) - 0 \\ (0 + r \cdot (-3)) - 0 \\ (0 + r \cdot 0) - 6 \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftarrow$ Fällt weg da 1.Faktor = 0

$$= (-6) \cdot 3 + (-6) \cdot (-6) \cdot r + (-3 \cdot 0) + (-3) \cdot (-3) \cdot r = 0$$
$$= -18 + 36r + 9r = 0$$
$$= -18 + 45r = 0 \quad | +18; :45$$
$$r = \frac{2}{5}$$

$r = \frac{2}{5}$ in $g_{AC}(x)$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

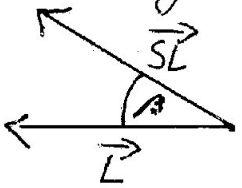
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -1{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}}} = L$$

Nr 2b) Fortsetzung

Skizze:



$\vec{L}$ $\vec{SL}$

$$\cos\beta = \frac{\left|\begin{pmatrix}0,6\\-1,2\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0,6\\-1,2\\6\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{0,6^2+(-1,2)^2+0^2}\cdot\sqrt{0,6^2+(-1,2)^2+6^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{21}}{21} \approx 0,218$$

$$\beta = \text{arcus cos}\ \frac{\sqrt{21}}{21} \approx \underline{\underline{77,4^\circ}}$$

Nr 3 a)

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{AB} \circ \left(\vec{AC} \times \vec{AS}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{matrix}-3\\3\\0\end{matrix} \circ \left(\begin{pmatrix}-6\\-3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\6\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-18\\36\\-9\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 162$$

$$= \underline{\underline{27\ \text{VE}}}$$

Blatt 6

Nr 3 b)

- Beide Dreiecke sind gleichschenklich
- $|\overline{CA}| = |\overline{CB}| = |\overline{SA}| = |\overline{SB}|$
- aus Aufgabe 3a $|\overline{CA}| = |\overline{SA}|$
- $\overline{AB}$ bleibt bei beiden zur Flächenberechnung gleich

Nr 3 c)

$$M: \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{S}) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,5\\0\\3\end{pmatrix} = \vec{m}$$

$$E_F = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1,5\\0\\3\end{pmatrix}\right] = 0$$ in Koordinatenform $E_F = x_3 - 3 = 0$

$\vec{n}$ paralell zu x_1x_2-Ebene

$$g_B = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix} \cancel{=0}$$

g_B in E_F:

$0 = (0+\lambda\cdot 6) - 3$

$0 = 6\lambda - 3 \quad |+3; :6$

$\lambda = \frac{1}{2}$

Schnittpunkt S_B von g_B mit E_F:

$$\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1,5\\3\end{pmatrix}$$

$$g_C = \begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} \cancel{=0}$$

g_C in E_F:

$0 = (0+\mu\cdot 6) - 3$

$\mu = \frac{1}{2}$

Schnittpunkt S_C von g_C mit E_F:

$$\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix} + \cancel{\mu}\,\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1,5\\-1,5\\3\end{pmatrix} \cancel{=0}$$

Nr 3 c) Fortsetzung

$$A_{\Delta M S_B S_C} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{MS_B} \times \overrightarrow{MS_C} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6{,}75 \end{pmatrix} \right|$$

$$\underline{\underline{= 3{,}375 \text{ FE}}}$$

Nr 3 d)

$$\text{hess } E_{ABS} = \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6}{3} = 0$$

$d = 3$ Für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$

$$3 = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + x_3 - 6}{3}$$

$$3 = \frac{x_3 - 6}{3} \quad | \cdot 3$$

$$x_3 = 15$$

Aufpunkt $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{g(d_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}}}$$ ← Richtungsvektor $\overrightarrow{SA}$