ABI 2012

Analysis

Aufgabengruppe I

Teil 1

1) a) $f(x) = \ln(x+3)$; $\quad D_f = ]-3;+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x+3}$;

b) $f(x) = \frac{3}{x^2-1}$; $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

$f'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot 0 - 3\cdot(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$;

2) a) $f(x) = -x^2+5$

b) $g(x) = |x-5|$

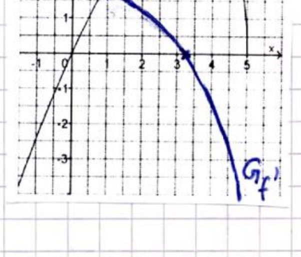
3) $f(x) = \sin(2x)$

a) $x_{01} = 0$; $x_{02} = \frac{1}{2}\pi$

b) $\int_0^2 \sin(2x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^2 = -\frac{1}{2}\cos 4 + \frac{1}{2}\cos 0 \approx 0{,}83$

Im Intervall [0;2] liegt der Graph $G_f$ ober- und unterhalb der x-Achse. Das Integral gibt die Flächenbilanz an, die Fläche zwischen $G_f$ und der x-Achse wäre größer

4)



# Teil 2

$f(x) = \frac{2e^x}{e^x+9}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

**1) a)** $f(x) \overset{!}{=} 0 \iff \frac{2e^x}{e^x+9} = 0 \iff 2\underbrace{e^x}_{>0} = 0$ ↯

$\Rightarrow$ kein Schnittpunkt mit der x-Achse

$f(0) = \frac{2e^0}{e^0+9} = \frac{2\cdot 1}{1+9} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

$\Rightarrow$ Achsenschnittpunkt $S(0/0{,}2)$

**b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x+9}_{\to 9}} = 0$ ged;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x+9} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}\cdot 2}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{9}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\underbrace{\frac{9}{e^x}}_{\to 0}} = \frac{2}{1} = 2$ ged

**c)** $f'(x) = \frac{(e^x+9)\cdot 2e^x - 2e^x\cdot e^x}{(e^x+9)^2} = \frac{2e^{2x}+18e^x-2e^{2x}}{(e^x+9)^2}$

$= \frac{18\overbrace{e^x}^{>0}}{(e^x+9)^2} \begin{matrix} \}>0 \\ \}>0 \text{ wg Quadrat} \end{matrix} > 0$

$\Rightarrow G_f$ streng monoton steigend

**d)** $S(0/0{,}2)$

$f'(0) = \frac{18e^0}{(e^0+9)^2} = \frac{18}{100} = 0{,}18 = m$

$y = m\cdot x + t$

$0{,}2 = 0{,}18\cdot 0 + t \Rightarrow t = 0{,}2 \Rightarrow$ Tangente: $y = 0{,}18x + 0{,}2$

**e)** $A = \int_0^4 \frac{2e^x}{e^x+9}\,dx = 2\cdot\int_0^4 \frac{e^x}{e^x+9}\,dx = 2\cdot\left[\ln|\underbrace{e^x+9}_{>0!}|\right]_0^4$  $\overset{!}{\underset{\circ}{\nabla}}$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$

$= 2\cdot\left(\ln(e^4+9) - \ln 10\right) \approx 3{,}7$

**f)** Da $G_f$ streng monoton steigend ist nach c), ist $f$ umkehrbar!

$\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f = ]0;2[$

$\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

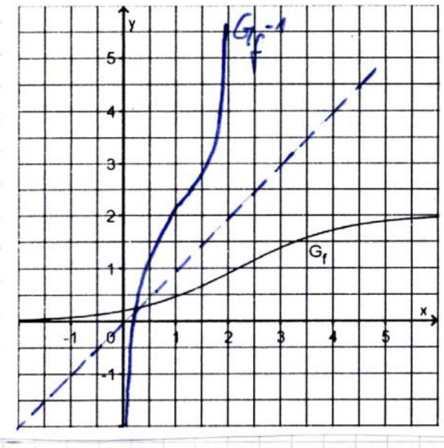


Abb. 2

2) a) $f(0) = 0{,}2$

$f(2) = \frac{2e^2}{e^2+9} \approx 0{,}902$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ 90,2 cm − 20 cm = 70,2 cm

Die Sonnenblume wächst innerhalb der ersten zwei Monate ca. 70 cm.

b) $f(x) \stackrel{!}{=} 1{,}5 \iff \frac{2e^x}{e^x+9} = 1{,}5 \quad | \cdot (e^x+9)$

$2e^x = 1{,}5e^x + 13{,}5 \quad | -1{,}5e^x$

$0{,}5e^x = 13{,}5 \quad | \cdot 2$

$e^x = 27 \Rightarrow x = \ln 27 \approx 3{,}3$

$\Rightarrow$ Nach ca. 3,3 Monaten ist die Sonnenblume 1,5 m hoch!

Graphisch: x-Koordinate des Schnittpunkts zwischen $G_f$ und der Parallelen zur x-Achse durch (0/1,5) (d.h. der Geraden $y = 1{,}5$)

c) $x_M \approx 2{,}2$

$f'(2{,}2) = \frac{18e^{2{,}2}}{(e^{2{,}2}+9)^2} \approx 0{,}5 \frac{m}{30d} \approx 0{,}017 \frac{m}{d} = 1{,}7 \frac{cm}{d}$

oder: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \frac{m}{30d}$ (→ siehe Steigungsdreieck!)

d) $y = 0{,}18x + 0{,}2$

Nullstelle der Tangente:

$0{,}18x + 0{,}2 = 0 \iff 0{,}18x = -0{,}2 \iff x = \frac{-0{,}2}{0{,}18} = -\frac{10}{9} \approx -1{,}1$

Die Näherung liefert mit über einem Monat eine viel längere Zeitspanne als 2 Wochen, d.h. sie steht nicht im Einklang mit der Realität!

e) I) hätte einen Graphen, der bzgl. $G_f$ um $k$ Einheiten nach links verschoben wäre. Damit wäre aber z. B. die Höhe zu Beobachtungsbeginn nicht die gleiche wie bei der Sorte „Alba"

II) hätte einen Graphen, der bzgl. $G_f$ entlang der y-Achse gestreckt (für $k>1$) bzw gestaucht (für $k<1$) wäre. Auch hier stimmt die Höhe zu Beobachtungsbeginn nicht mit „Alba" überein ($k=1$ ausgeschlossen, da sonst $f(x)$)

f) $g(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+9}$, also $k=2$
(Streckung von $G_f$ in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$, also „Stauchung")