ABI 2012

Analysis

Aufgabengruppe II

Teil 1

1) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+4x+3} = \frac{2x+3}{(x+1)(x+3)}$; $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; -3\}$

2 $x^2+4x+3=0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow x_1 = -1$; $x_2 = -3$

③ 1 Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+3=0 \Rightarrow x = -1{,}5$ ✓

2) $g(x) = x \cdot e^{-2x}$

2 a) $g'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = (1-2x) \cdot e^{-2x}$ ✓✓

waagrechte Tangente: $g'(x) \overset{!}{=} 0$ ✓

2 $(1-2x) \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{>0} = 0 \Leftrightarrow 1-2x=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

1 $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-1} = \frac{1}{2e}$ ✓

$\Rightarrow P(\frac{1}{2} | \frac{1}{2e})$

⑤

② b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-2x}^{\to +\infty}}}_{\to +\infty}) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-2x}^{\to -\infty}}}_{\to 0}) = 0$ ✓

3) $h(x) = -\ln x + 3$; $D = \mathbb{R}^+$

a) $\ln x \to -\ln x$ Spiegelung an der x-Achse ✓

$-\ln x \to -\ln x + 3$ Verschiebung um 3 LE entlang der y-Achse nach oben ✓

②

b) $B(1/3)$ $h(1) = -\ln 1 + 3 = 3$

2 $h'(x) = -\frac{1}{x}$ ✓ $h'(1) = -1$ ✓

$y = m \cdot x + t$ ✓

$3 = -1 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 4$

oder: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= -1 \cdot (x-1) + 3 = -x + 4$

④ 2 $\Rightarrow y = -x + 4$ ✓

① 4) a) Eine Nullstelle ist immer die untere Integralgrenze ✓

③ b) z.B. $f(t) = t$ (oder $f(t) = t^3$) ; $x_{01} = -1$; $x_{02} = 1$ ✓

Teil 2

1) a) $p(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-2) = a \cdot (x^2 - 4)$

$p(0) = 5 \Rightarrow 5 = a \cdot (-4) \Rightarrow a = -\frac{5}{4} = -1{,}25$

$\Rightarrow p(x) = -1{,}25 \cdot (x^2 - 4) = -1{,}25x^2 + 5$ ③

b) $q(x) = -0{,}11x^4 - 0{,}81x^2 + 5$

$q(-x) = -0{,}11 \cdot (-x)^4 - 0{,}81 \cdot (-x)^2 + 5$

$= -0{,}11x^4 - 0{,}81x^2 + 5 = q(x)$

$\Rightarrow G_q$ ist achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse 2

$A(-2|0)$: $q(-2) = -0{,}11 \cdot (-2)^4 - 0{,}81 \cdot (-2)^2 + 5$

$= -0{,}11 \cdot 16 - 0{,}81 \cdot 4 + 5$

$= -1{,}76 - 3{,}24 + 5 = 0 \Rightarrow A \in G_q$ 1

$B(2|0)$: $q(2) = -0{,}11 \cdot 2^4 - 0{,}81 \cdot 2^2 + 5$

$= -1{,}76 - 3{,}24 + 5 = 0 \Rightarrow B \in G_q$ 1

Extrempunkt:

$q'(x) = -0{,}44x^3 - 1{,}62x = -x\,\underbrace{(0{,}44x^2 + 1{,}62)}_{>0}$

$\Rightarrow q'$ besitzt genau eine (einfache) Nullstelle bei $x = 0$

mit Vorzeichenwechsel von + nach −

$\Rightarrow q$ besitzt genau einen Extrempunkt (HOP) 3 ⑦

c) $p(1) = -1{,}25 \cdot 1 + 5 = 3{,}75$

$q(1) = -0{,}11 \cdot 1 - 0{,}81 \cdot 1 + 5 = 4{,}08$

$\Rightarrow G_q$ ist der durchgezogene Graph ②

d) $d(x) = q(x) - p(x) = -0{,}11x^4 - 0{,}81x^2 + 5 - (-1{,}25x^2 + 5)$

$d(x) = -0{,}11x^4 + 0{,}44x^2$ mit $x \in]0;2[$

1 $d'(x) = -0{,}44x^3 + 0{,}88x$ ✓

$d'(x) = 0 \iff -0{,}44x^3 + 0{,}88x = 0$

$\iff -0{,}44x \cdot (x^2 - 2) = 0$ ✓

$\iff -0{,}44x = 0$ oder $x^2 - 2 = 0$

$x_1 = 0 \notin I$ ✓ $x_2 = -\sqrt{2} \notin I$

2 $\underline{\underline{x_3 = \sqrt{2} \in I}}$

$d''(x) = -1{,}32x^2 + 0{,}88$

1 ✓ $d''(\sqrt{2}) = -1{,}32 \cdot 2 + 0{,}88 = -1{,}76 < 0 \Rightarrow$ bei $x_3 = \sqrt{2}$ ist ein Maximum

1 $d(\sqrt{2}) = -0{,}11 \cdot \sqrt{2}^4 + 0{,}44 \cdot \sqrt{2}^2 = -0{,}44 + 0{,}88 = 0{,}44$ ✓

$\Rightarrow$ Die größte Differenz ist mit **0,44 LE** an der Stelle $x_3 = \sqrt{2}$

⑤

e) $A = 2 \cdot \int_0^2 (-0{,}11x^4 - 0{,}81x^2 + 5)\,dx$ ✓

$= 2 \cdot \left[-\frac{0{,}11}{5}x^5 - \frac{0{,}81}{3}x^3 + 5x\right]_0^2$ ✓

$= 2 \cdot (-0{,}022 \cdot 2^5 - 0{,}27 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2 - 0)$ ✓

$= 2 \cdot 7{,}136 = 14{,}272 \approx 14{,}3$ FE ✓

④

f) Berechnung des Schnittpunkts von $q(x)$ und $y = 1{,}1$:

1 $q(x) = 1{,}1 \Rightarrow x_s$

1 Damit Berechnung des oberen Teils mit $A_{oben} = 2 \cdot \int_0^{x_s} (q(x) - 1{,}1)\,dx$

1 $\Rightarrow A_{unten} = A - A_{oben}$ als Differenz der in e) berechneten Fläche und A_{oben}

1 $\Rightarrow \frac{A_{oben}}{A_{unten}}$ ist das gesuchte Verhältnis!

④

2) a) HOP(4 | 74)

Ca. 4 Minuten nach Öffnung der Schleuse ist der Wasserdurchfluss mit $74 \frac{m^3}{min}$ am größten. 2

Wendepunkte bei ca $t_1 = 2{,}5$ und $t_2 = 5{,}8$
Nach ca 2,5 Minuten nach Öffnung der Schleuse ist die momentane Wasserdurchflussrate am größten, nach ca 5,8 Minuten am kleinsten. 3

⑤

b) $\int_1^4 f(t)\,dt \approx 3 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 54 = 141$ 3

In der Zeit von 1 bis 4 Minuten nach Schleusenöffnung fließen $141\,m^3$ Wasser an der Messstelle vorbei. 2

⑤

c) $t = 4: \quad \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} \approx \frac{74 - 35}{2} = 19{,}5$ + Zeichnung 2

$t = 3: \quad \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \approx \frac{63 - 35}{1} = 28$ + Zeichnung 2

Der Grenzwert $\lim\limits_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$ bestimmt die momentane Änderungsrate des Wasserdurchflusses 2 Minuten nach Schleusenöffnung 1

⑤