ABI 2012

Geometrie

Aufgabengruppe I

a) $E: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenform von E: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

in Koordinatenform: $E: 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - (0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 0$

$E: x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

b) $|\vec{n}_E| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

HNF von E: $\frac{x_2 + 2x_3 - 8}{\sqrt{5}} = 0$

$\Rightarrow d(R; E) = \left| \frac{0 + 2 \cdot 0 - 8}{\sqrt{5}} \right| = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}58$ LE (m)

c) $G(2|4|2)$; $\overline{GL} = 1$

$H(2|6|1)$; $K(1|6|1)$; $L(1|4|2)$

$A_{GHKL} = l \cdot b = |\overrightarrow{GH}| \cdot 1 = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ FE

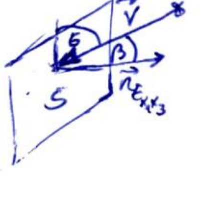
$\approx 2{,}24\,m^2$

d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2\tau \\ x_2 = 4 - 8\tau \\ x_3 = 2 - \tau \end{cases}$

Ebene OPQR $\hat{=}$ x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$

g in $E_{x_1x_3}$: $4 - 8\tau = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow S(1|0|1{,}5)$



Normalenvektor von $E_{x_1x_3}$: $\vec{n}_{E_{x_1x_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\beta = \sphericalangle(-\vec{v}; \vec{n}_{E_{x_1x_3}})$

$\cos(\beta) = \cos \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 8^2 + 1^2} \cdot 1} = \cos \frac{8}{\sqrt{69}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{69}}\right) \approx 15{,}6°$

$\Rightarrow$ gesuchter Winkel: $\varepsilon = 90° - 15{,}6° = 74{,}4°$

e) $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{G} + \vec{H}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\5\\1{,}5\end{pmatrix}$

$d(M; E_{x_1x_2}) = 1{,}5$ (Höhe von M über dem Boden)

$1{,}5 - \frac{1}{2} \cdot \overline{GH} = 1{,}5 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \approx 0{,}38$

Die untere Fensterkante liegt bei senkrechter Stellung noch ca 38cm über dem Boden!

f) $1{,}2\,cm \mathrel{\hat=} 40\,cm$

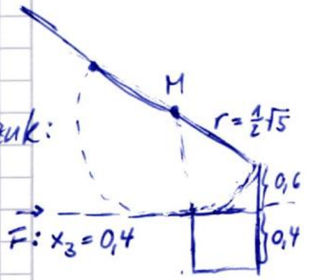
$7{,}8\,cm \mathrel{\hat=} 40\,cm \cdot 6{,}5 = 260\,cm = 2{,}60\,m$

$t = 6 - 5{,}5 = 0{,}5\,m = 50\,cm$

t ergibt sich als Differenz der x_2-Koordinaten des Aufpunktes von k und eines beliebigen Punktes des Kniestocks (rechte Raumwand)

g) $k: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\5{,}5\\0{,}4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 0 + \lambda$

Berechne Abstand von M zu k: Ebene F durch M senkrecht zu k:



$F: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\5\\1{,}5\end{pmatrix}\right] = 0$

$F: x_1 - 2 = 0$

Schnittpunkt T von k und F: k in F

$\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

$\Rightarrow \vec{T} = \begin{pmatrix}0\\5{,}5\\0{,}4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5{,}5\\0{,}4\end{pmatrix}$

$d(M, k) = |\overrightarrow{MT}| = \left|\begin{pmatrix}2 - 2\\5{,}5 - 5\\0{,}4 - 1{,}5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\-1{,}1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 0{,}5^2 + (-1{,}1)^2}$

$= \frac{\sqrt{145}}{10} \approx 1{,}21\,m > \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

$\Longrightarrow$ Das Fenster kann nicht am Möbelstück anstoßen!