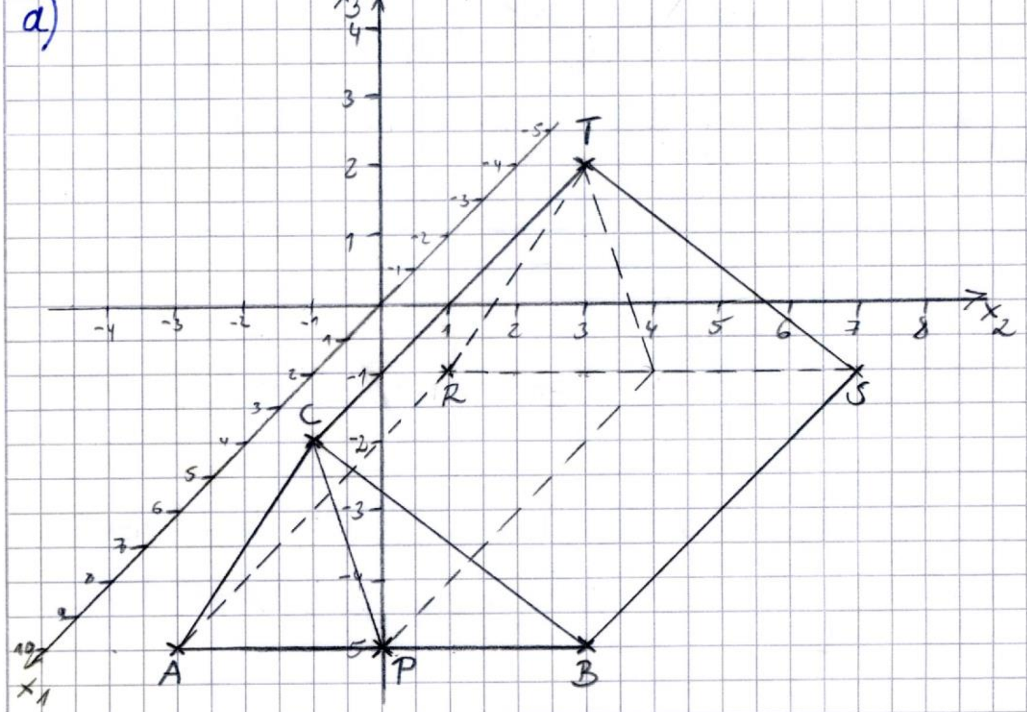
ABI 2012
Geometrie
Aufgabengruppe II

$A(10|2|0)$; $B(10|8|0)$; $C(10|4|3)$;
$R(2|2|0)$; $S(2|8|0)$; $T(2|4|3)$

$M(5|6{,}5|3)$

a)



3

Die Grundfläche ABC liegt parallel zur x_2x_3-Ebene,
1 da alle Punkte dieselbe x_1-Koordinate haben!

Volumen des Prismas:

$$V_P = G \cdot h_P = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_D \cdot \overline{CT}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 8$$
2 $$= 72\ VE$$

Die Längen können direkt aus den Koordinaten der Punkte berechnet werden, auf Grund der Lage des Prismas!

(6)

b) $E: \vec{x} = \vec{B} + \lambda \cdot \vec{BS} + \mu \cdot \vec{BC}$

1 $$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{BT}$ $\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

2 $$\vec{BS} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 32 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

1

$$E: 3x_2 + 4x_3 - 24 = 0$$

(4)

c) $\vec{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ 1

$$\cos\varphi = \frac{\vec{CA} \circ \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2+(-2)^2+(-3)^2} \cdot \sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}} = \frac{-8+9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{25}} = \frac{1}{5\sqrt{13}}$$

$\Longrightarrow \varphi = \arccos \frac{1}{5\sqrt{13}} \approx 86{,}82°$ 2

(3)

d) P als Mittelpunkt der Seite [AB]: 1

$\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(10|5|0)$

Mit dieser Wahl von P wird das ΔABC in zwei inhaltsgleiche Driecke G_1 und G_2 zerlegt (gleiche Grundlinie, gleiche Höhe h_D)

Die neu entstehenden Prismen haben dieselbe Höhe h_p.

$\Longrightarrow V_{P1} = G_1 \cdot h_p = G_2 \cdot h_p = V_{P2}$, da $G_1 = G_2$ 1 + Zeichnung 1

(3)

e) Der Teilkörper ABCT ist eine dreiseitige Pyramide, 1

dessen Volumen $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_p = \frac{1}{3} \cdot V_P$ ist.

Der Restkörper muss also das Volumen $\frac{2}{3} V_P$ haben 2

und damit sind die beiden Teilkörper nicht volumengleich (3)

f) $M(5|6{,}5|3)$; $r \mathrel{\hat{=}}$ Abstand von M zur Ebene **E**

$|\vec{n}_E| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

HNF von E: $\frac{3x_2 + 4x_3 - 24}{5} = 0$ 1

$d(M;E) = \left|\frac{3 \cdot 6{,}5 + 4 \cdot 3 - 24}{5}\right| = \left|\frac{7{,}5}{5}\right| = 1{,}5\ LE = r$ 1

Berührpunkt W:

Lot l von M auf E: $l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{cases} 5 \\ 6{,}5 + 3\lambda \\ 3 + 4\lambda \end{cases}$ 1

l in E: $3 \cdot (6{,}5 + 3\lambda) + 4(3 + 4\lambda) - 24 = 0$

$19{,}5 + 9\lambda + 12 + 16\lambda - 24 = 0 \Longleftrightarrow 7{,}5 + 25\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{10}$ 2

$\xrightarrow{\lambda \text{ in } l} \vec{W} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5{,}6 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} \Longrightarrow W(5|5{,}6|1{,}8)$ 1

(6)

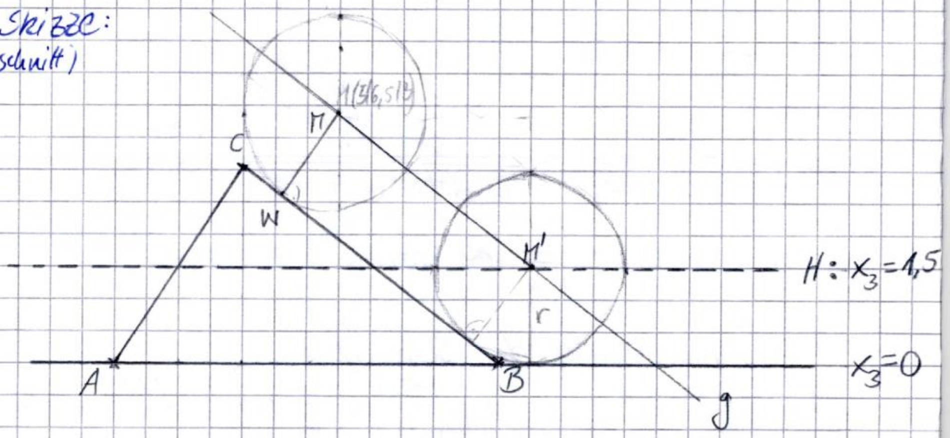
M(5/6,5/3)
M'(5/ 11,5)

$\vec{M'} = \vec{M} + \lambda \cdot \vec{CB}$ 1,5
$= \begin{pmatrix}5\\6,5\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ \vdots \\1,5\end{pmatrix}$

III) $3 + \lambda \cdot (-3) = 1,5$
$-3\lambda = -1,5 \quad | : (-3)$
$\lambda = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow m_2 = 6,5 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 8,5$
$\vec{M'} = \begin{pmatrix}5\\8,5\\1,5\end{pmatrix}$

g) Skizze:
(Schnitt)



$$g: \vec{X} = \vec{M} + \lambda \cdot \vec{CB} = \begin{pmatrix}5\\6,5\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$$

Ebene durch ABSR ist x_1x_2-Ebene
Bilde Ebene $H \parallel x_1x_2$-Ebene im Abstand 1,5 LE

$H: \; x_3 = 1,5$ 1

$g \cap H: \quad 3 + \lambda \cdot (-3) = 1,5$
$\qquad -3\lambda = -1,5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

λ in g $\Rightarrow \vec{M'} = \begin{pmatrix}5\\6,5\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8,5\\1,5\end{pmatrix}$

1,5 $\Rightarrow M'(5/8,5/1,5)$ Lage von M, wenn Kugel x_1x_2-Ebene berührt

zurückgelegter Weg:

1 $|\vec{MM'}| = \left|\begin{pmatrix}5-5\\8,5-6,5\\1,5-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\2\\-1,5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+2^2+(-1,5)^2} = \sqrt{6,25} = 2,5$ LE