ABI 2013
Analysis
Aufgabengruppe II

Teil 1

1) $f(x) = \ln(2013 - x)$

- $2013 - x > 0 \Rightarrow 2013 > x \Rightarrow \mathbb{D} =]-\infty; 2013[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(\underbrace{2013 - \underbrace{x}_{\to -\infty}}_{\to +\infty}) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2013} \ln(\underbrace{2013 - x}_{\to 0}) = -\infty$
- $f(0) = \ln(2013) \approx 7{,}61$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 / \approx 7{,}61)$

$f(x) \overset{!}{=} 0 \iff \ln(2013 - x) = 0 \iff 2013 - x = 1$
$x = 2012$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x(2012/0)$

2) $f(x) = x \cdot \sin x$

$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cdot \cos x$

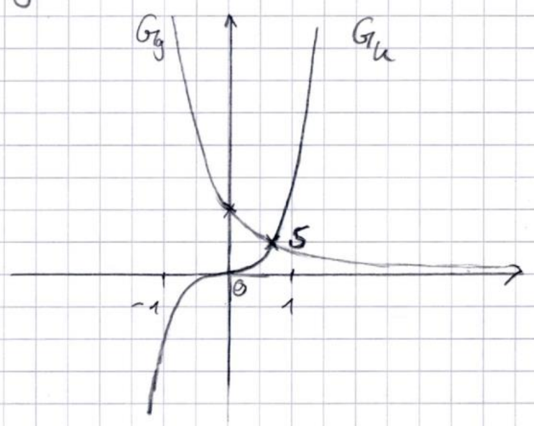
$f''(x) = \cos x + 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = 2\cos x - x \sin x$

$f''(0) = 2 \underbrace{\cos 0}_{1} - 0 \cdot \sin 0 = 2 > 0$

$\Rightarrow G_f$ ist in der Umgebung von $x = 0$ linksgekrümmt

3) $g(x) = e^{-x}$; $h(x) = x^3$

a)



b) $d(x) = g(x) - h(x) = e^{-x} - x^3$; $x_0 = 1$

$d'(x) = -e^{-x} - 3x^2$

$x_1 = 1 - \frac{d(1)}{d'(1)} = 1 - \frac{e^{-1} - 1^3}{-e^{-1} - 3 \cdot 1^2} \approx 0{,}81$

4) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

a) $F(0) = 0$

$F(2) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$

$F(-2) = -\frac{\pi}{2}$

b)

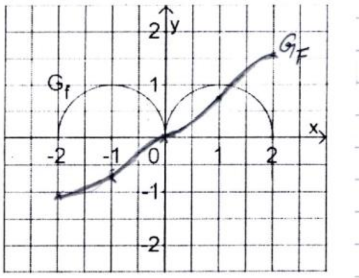


Abb. 1

Teil 2

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

1) a) schräge Asymptote: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

senkrechte Asymptote: $x = -1$

Schnittpunkt: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \Big| -(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$

$$\frac{8}{x+1} = 0 \iff 8 = 0 \quad ↯$$
$$x \in \emptyset$$

$\Rightarrow$ kein Schnittpunkt

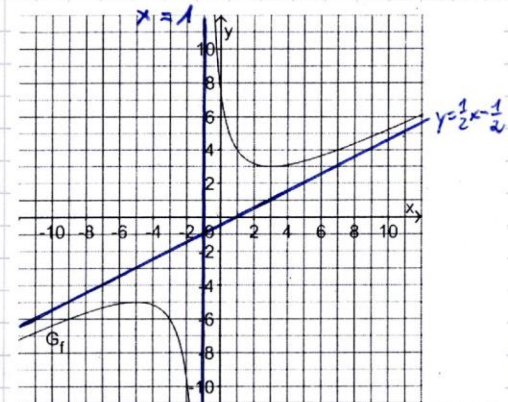


Abb. 2

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 8\cdot(x+1)^{-1}$

$f'(x) = \frac{1}{2} + 8\cdot(-1)\cdot(x+1)^{-2}\cdot 1 = \frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} - 8(x+1)^{-2}$

$f''(x) = 16\cdot(x+1)^{-3} = \frac{16}{(x+1)^3}$

$f'(x) \overset{!}{=} 0$

$\frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2} = 0 \iff \frac{1}{2} = \frac{8}{(x+1)^2} \iff (x+1)^2 = 16$

$\iff x+1 = \pm 4 \Rightarrow x_{11} = 3;\ x_{12} = -5$

$f''(3) = \frac{16}{4^3} = 0{,}25 > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $x_{11} = 3$

$f(3) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{4} = 3 \Rightarrow TIP(3|3)$

$f''(-5) = \frac{16}{(-4)^2} = -0{,}25 < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $x_{12} = -5$

$f(-5) = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{-4} = -5 \Rightarrow HOP(-5|-5)$

2) a) $g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2} + \frac{8}{x-1+1} + 1$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{x} + 1$

$= \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}$

$g(-x) = \frac{1}{2}\cdot(-x) + \frac{8}{-x} = -\frac{1}{2}x - \frac{8}{x} = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{8}{x}\right) = -g(x)$

$\Rightarrow G_g$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

$\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zu $P(-1|-1)$

b) z.z.: $\int_0^4 f(x)\,dx = 2 + 8\ln 5$

Bemerkung:

$\frac{8}{x+1} = 8\cdot\frac{1}{x+1} = 8\cdot\frac{(x+1)'}{x+1}$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$

$\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 8\cdot\ln|x+1|\right]_0^4$

$= \frac{1}{4}\cdot 4^2 - \frac{1}{2}\cdot 4 + 8\cdot\ln 5 - (0 - 0 + 8\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0}) = 2 + 8\cdot\ln 5$ qed.

$\int_{-6}^{-2} f(x)\,dx = -(2 + 8\cdot\ln 5 + 2\cdot 4) = -10 - 8\cdot\ln 5$

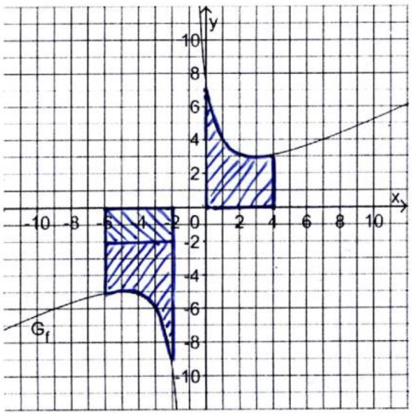


Abb. 2

$f(x) \leq 5$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} \leq 5 \quad | \cdot 2$

$x - 1 + \frac{16}{x+1} \leq 10$

$\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{16}{x+1} \leq 10$

$\frac{x^2 - 1 + 16}{x+1} \leq 10 \quad | \cdot (x+1) > 0$, da $x > 0$!

$x^2 + 15 \leq 10x + 10 \quad | -10x - 10$

$\underbrace{x^2 - 10x + 5}_{\text{nach oben geöffnete Parabel}} \leq 0$

$x^2 - 10x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-20}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow x_1 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0{,}5$

$x_2 = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9{,}5$

$\Rightarrow x \in [5 - 2\sqrt{5} ; 5 + 2\sqrt{5}]$

$x \in [\approx 0{,}5 ; \approx 9{,}5]$

3) a) $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} + 8 = 7{,}5$

$f(15) = \frac{1}{2} \cdot 15 - \frac{1}{2} + \frac{8}{16} = 7{,}5$

d.h. wenn die Dose leer ist oder komplett gefüllt, so liegt der Schwerpunkt von Dose incl. Flüssigkeit genau auf halber Dosenhöhe

b) Der Schwerpunkt liegt zunächst auf halber Dosenhöhe und wandert bei beginnender Füllung rasch nach unten bis zu einer Höhe von 3 cm über dem Boden, wenn die Füllhöhe der Flüssigkeit 3cm beträgt. Im weiteren Verlauf wandert der Schwerpunkt wieder langsam nach oben, bis er bei maximaler Füllung wieder die halbe Dosenhöhe erreicht. Der Tiefpunkt (3/3) bedeutet also, dass bei 3cm Füllhöhe der Schwerpunkt ebenfalls bei 3cm liegt.

c)

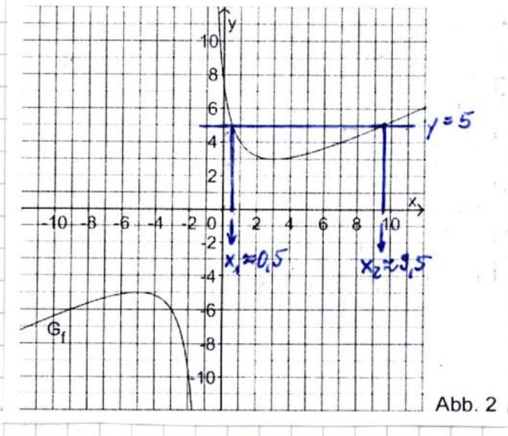


Abb. 2

S höchstens 5cm hoch für $x \in [\approx 0{,}5; \approx 9{,}5]$