ABI 2013

Geometrie
Aufgabengruppe I

$A(28|0|0)$; $B(28|10|0)$; $D(20|0|6)$; $P(0|0|0)$

a) $C(20|10|6)$

$\overline{AB} = 10 - 0 = 10 = \overline{CD}$ (aus den x_2-Koordinaten)

$\overline{AD}^2 = 6^2 + (28-20)^2 = 36 + 64 = 100$ (aus x_1 bzw x_3-Koordinaten)

$\Rightarrow \overline{AD} = 10$, ebenso für $\overline{BC} = 10$

$\Rightarrow$ alle vier Seiten sind gleich lang

$\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = -8\cdot 0 + 10\cdot 0 + 0\cdot 6 = 0$

$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AD}$

$\Rightarrow$ ABCD hat bei A und damit auch bei B, C und D einen rechten Winkel

$\Rightarrow$ ABCD ist ein Quadrat

b) $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} = 20 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$E: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$

$E: \; 3x_1 + 4x_3 - 84 = 0$

c) $\cos\varphi = \cos \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_{E_{x_1x_2}}}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{E_{x_1x_2}}|} = \cos \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+0^2+4^2} \cdot 1} = \cos \frac{4}{5} = \cos 0{,}8$

$\Rightarrow \varphi = \arccos(0{,}8) \approx 36{,}9°$

d) PQRS ist parallel zu ABCD und hat damit den gleichen Normalenvektor. Als Aufpunkt kann P, also der Ursprung verwendet werden (F enthält O)

$\Rightarrow F: \; 3x_1 + 4x_3 = 0$

e) Schneidet man vom Spat entlang der Kante [CD] senkrecht zur x_1x_2-Ebene ein dreiseitiges Prisma ab und setzt es mit [AB] an die Kante [PQ] an, so erhält man einen Quader mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe im Vergleich zum Spat und $V_Q = G \cdot h$

f) $V_{Spat} = G \cdot h = 1m \cdot 2{,}8m \cdot 0{,}6m = 1{,}68m^3$

$m_{Spat} = 1{,}68m^3 \cdot 2{,}1\frac{t}{m^3} = 3{,}528\,t$

g) $H(11|3|6)$

Diagonalenschnittpunkt: $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{P}) = \frac{1}{2}\vec{B} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{h} = \vec{H} + \tau \cdot \overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Länge der Stange im Spat $\frac{1}{4} \cdot 1{,}4m = 0{,}35m \mathrel{\hat{=}} 3{,}5LE$

$|\overrightarrow{HM}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+4+36} = 7$

$\Rightarrow \overrightarrow{HM_0} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{P} = \vec{H} + 3{,}5 \cdot \overrightarrow{HM_0} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 3{,}5 \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

h) $r = 0{,}8 \mathrel{\hat{=}} 8LE$; $K(k_1|k_2|k_3)$

Wenn die Koordinaten von K bekannt sind, sind auch die Koordinaten von M bekannt: $M(k_1|k_2|k_3+r)$

Damit kann man eine Kugelgleichung aufstellen:

$(x_1 - k_1)^2 + (x_2 - k_2)^2 + (x_3 - (k_3 + 8))^2 = 64$

Einsetzen von h in die Kugelgleichung und Lösen der Gleichung zeigt, ob es eine Lösung für τ und damit einen Berührpunkt gibt oder nicht!