Mathematik Probe-ABI LÖSUNG 2013

Analysis

1. a) $x_0 = 2$ b) $x_0 = \ln 2$ c) $x_0 = 3$

2. geg.: $f(x) = \ln(5 - x^2)$ ges.: Tangente an G_f im Punkt $P(2|f(2))$

Ansatz: $y = mx + t = f'(2) \cdot x + t$

$f'(x) = \frac{1}{5-x^2} \cdot (-2x)$

$m = f'(2) = \frac{-2 \cdot 2}{5-2^2} = -4$

$f(2) = \ln(5-4) = \ln 1 = 0$

Also: $m \cdot 2 + t = 0$

=> $-4 \cdot 2 + t = 0$ => $t = 8$

=> $y = -4x + 8$

3. a) $x^3 + 1$ b) $\sin(2x)$ c) e^{-x}

4.

a) H ist ebenfalls eine Stammfunktion von f, da $H(x) = F(x) + 1$ ist und somit $H'(x) = F'(x) = f(x)$ gilt.

b) Der Wert des gegebenen Integrals stimmt nicht mit dem Flächeninhalt überein, da ein Teil der Fläche oberhalb und ein anderer Teil der Fläche unterhalb der x-Achse liegt. Das Integral gibt hier eine Flächenbilanz an; die Differenz der beiden Teilflächen.

c) $A_{ges} = \int_1^3 f(x)dx = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1) = 0 - \left(-\frac{1}{6} \cdot \sqrt{4}^3\right) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

5.

a) $\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 (-6x^2 + 12x + 18)dx = 6 \cdot \int_0^1 (-x^2 + 2x + 3)dx = 6 \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_0^1$

$= 6 \cdot \left[-\frac{1}{3} + 1 + 3\right] = 6 \cdot 3\frac{2}{3} = 22$

b) Die Gerade g, die Gerade $x = 1$ und die x-Achse bilden ein Dreieck. Für den Flächeninhalt dieses Dreiecks muss gelten: $A_\Delta = \frac{54}{2} - \int_0^1 f(x)dx = \frac{54}{2} - 22 = 5$

Also: $5 = \frac{1}{2} \cdot f(1) \cdot \Delta x$

$5 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \Delta x$

$\Delta x = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

⇨ $x_{ges} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$

Stochastik

1.

a) $C = A \cup B$

$D = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

b) Vierfeldertafel

	A	$\bar{A}$	
B	0,13	0,52	0,65
$\bar{B}$	0,7	0,28	0,35
	0,2	0,8	1

2.

$P(b) = p; \qquad P(r) = 2p$

a) es muss gelten: $P(b) + P(r) + P(g) = 1$

=> $p + 2p + P(g) = 1$

=> $P(g) = 1 - 3p$

Da ein gelber Sektor dabei ist, muss gelten: $0 < P(g) < 1$

=> $0 < 1 - 3p < 1$

=> $-1 < -3p < 0$

=> $0 < 3p < 1$

=> $0 < p < \frac{1}{3}$

b) zweimal drehen

$P(mindestens\ einmal\ rot) = 1 - P(keinmal\ rot) = 1 - P(\bar{r}) \cdot P(\bar{r}) = 1 - (1 - 2p) \cdot (1 - 2p)$

$= 1 - (1 - 2p)^2 = 1 - (1 - 4p + 4p^2) = 4p - 4p^2$

Geometrie

1.

a) $\vec{v} \circ \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} \perp \overrightarrow{PQ}$

$\vec{v} \circ \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} \perp \overrightarrow{PR}$

b) $\overrightarrow{PS}$ muss senkrecht zu $\overrightarrow{PR}$ und zu $\overrightarrow{PQ}$ sein.

=> $\overrightarrow{PS} = s \cdot \vec{v}$

Außerdem muss gelten: $\left|\overrightarrow{PS}\right| = 6$

=> $|s \cdot \vec{v}| = 6$

$s \cdot \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} = \pm 6$

$s \cdot 3 = \pm 6$

=> $s = \pm 2$

⇨ 2 mögliche Koordinaten für S: $S_1(-2|4|4) \qquad S_2(2|-4|-4)$

2.

a) $\overrightarrow{AC_t} = \begin{pmatrix} -2 + t + 1 \\ 3 - 1 \\ 5 + t - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 1 \\ 2 \\ t + 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC_t} = \begin{pmatrix} -2 + t + 3 \\ 3 - 5 \\ 5 + t - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 1 \\ -2 \\ t - 1 \end{pmatrix}$

d.h.: $\overrightarrow{AC_t} = -\overrightarrow{BC_t}$ => $\left|\overrightarrow{AC_t}\right| = \left|\overrightarrow{BC_t}\right|$

⇨ Die Dreiecke ABC_t sind gleichschenklig.

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC_t}\right|$

$\left|\begin{pmatrix} -3 + 1 \\ 5 - 1 \\ 6 - 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} t - 1 \\ 2 \\ t + 1 \end{pmatrix}\right|$

$\sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{(t - 1)^2 + 2^2 + (t + 1)^2}$

$4 + 16 + 4 = t^2 - 2t + 1 + 4 + t^2 + 2t + 1$

$24 = 2t^2 + 6$

$18 = 2t^2$

$t = \pm 3$