ABI 2014
Analysis
Aufgabengruppe 1

Prüfungsteil A

1) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$f'(x) = \frac{\ln x \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$;

$f'(x) \overset{!}{=} 0 \iff \ln x - 1 = 0 \iff \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

für $1 < x < e$ gilt: $f'(x) = \frac{\overbrace{\ln x}^{<1} - 1\}<0}{(\ln x)^2\}>0} < 0 \Rightarrow f$ ist streng mon. abnehmend

für $x > e$ gilt: $f'(x) = \frac{\overbrace{\ln x}^{>1} - 1\}>0}{(\ln x)^2\}>0} > 0 \Rightarrow f$ ist streng mon. zunehmend

$\Rightarrow f'$ hat an der Stelle $x_0 = e$ eine Nst mit VZW $-/+$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt des Graphen: $TIP(e \mid e)$

$f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e$

2) $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$

a) $f(x) \overset{!}{=} 0 \iff \underbrace{e^x}_{\neq 0} \cdot x \cdot (2 + x) = 0 \Rightarrow x_{01} = 0$

$x_{02} = -2$

b) $F(x) = x^2 \cdot e^x$

$F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (2x + x^2) = f(x)$

$\Rightarrow F$ ist Stammfunktion von f

$G(1) = 1^2 \cdot e^1 + C \overset{!}{=} 2e \iff e + C = 2e \Rightarrow C = e$

$\Rightarrow G(x) = x^2 \cdot e^x + e$

3) $g_{a,c}(x) = \sin(ax) + c \quad a, c \in \mathbb{R}_0^+$

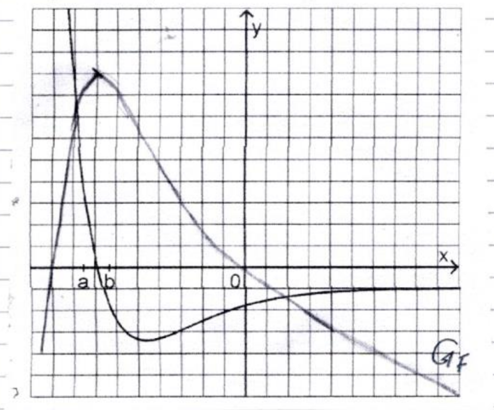
a) $\alpha)$ $a = 1$, $c = 1$

$\beta)$ $a = 2$; $c = 0$

b) $g'_{a,c}(x) = a \cdot \cos(ax) \qquad W_{g'_{a,c}} = [-a; a]$

4) a) von a bis zur Nullstelle von f ist G_F streng mon. steigend, von der Nullstelle von f bis b ist G_F streng mon. fallend (an der Nst ist also ein HOP)

b)



Prüfungsteil B

$f(x) = 2 - \sqrt{12-2x}$; $D_f =]-\infty; 6]$

1) a) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow 2-\sqrt{12-2x} = 0$

$2 = \sqrt{12-2x} \quad |(\ )^2$

$4 = 12-2x$

$2x = 8 \Longrightarrow x_s = 4 \Rightarrow S_x(4|0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = 2-\sqrt{12-2\cdot 0} = 2-\sqrt{12} = 2-2\sqrt{3} \Rightarrow S_y(0|\underbrace{2-2\sqrt{3}}_{\approx -1{,}46})$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(2-\underbrace{\sqrt{\underbrace{12-2x}_{\to+\infty}}}_{\to+\infty}\Big) = -\infty$

$f(6) = 2-\sqrt{12-2\cdot 6} = 2$

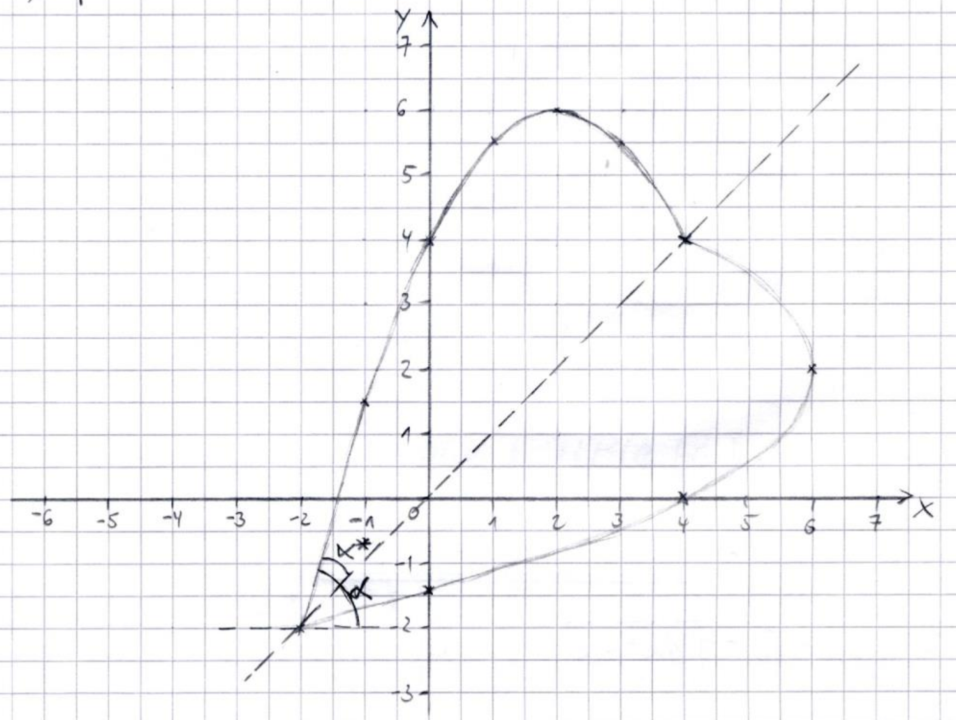
b) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{12-2x}}\cdot(-2) = \frac{1}{\sqrt{12-2x}}$; $D_{f'} =]-\infty; 6[$

$\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{12-2x}}_{\to 0}} = +\infty$, d.h. die Steigung von G_f wird unendlich groß (fast senkrechte Tang.)

c) G_f ist streng monoton steigend $\left(f'(x) = \frac{\overset{>0}{1}}{\underset{>0}{\sqrt{12-2x}}} > 0\right)$

$\mathbb{W}_f =]-\infty; 2]$

d) $f(-2) = 2 - \sqrt{12 - 2\cdot(-2)} = 2 - \sqrt{16} = 2 - 4 = -2$



e) $\mathbb{D}_{f^{-1}} =]-\infty; 2]$

$$y = 2 - \sqrt{12-2x}$$

$$\sqrt{12-2x} = y - 2 \quad |(\;)^2$$

$$12 - 2x = y^2 - 4y + 4$$

$$-2x = y^2 - 4y - 8 \quad |:(-2)$$

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + 2y + 4$$

Var. tausch

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 = f^{-1}(x)$$

2) a) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 = x \quad | -x$

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 4}}{2\cdot(-\frac{1}{2})} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-1} = \frac{-1 \pm 3}{-1}$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{-1} = 4; \quad x_2 = \frac{-1+3}{-1} = -2$$

b) $h(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4 - 8) = -\frac{1}{2}[(x-2)^2 - 12] = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 6$

$\rightarrow S(2|6)$

3) a) $A = \int_{-2}^{4} (h(x) - x)\,dx = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 4\right) dx$

$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_{-2}^{4}$

$= -\frac{1}{6} 64 + \frac{1}{2} \cdot 16 + 16 - \left(-\frac{1}{6} \cdot (-8) + \frac{1}{2} \cdot 4 - 8\right)$

$= -10\frac{2}{3} + 8 + 16 - 1\frac{1}{3} - 2 + 8 = 18\ \text{FE} \mathrel{\hat=} 18\,\text{cm}^2$

b) $P(-2|-2)$ $\left[h(-2) = -\frac{1}{2} \cdot 4 - 4 + 4 = -2 \right]$

$h'(x) = -x + 2$

$h'(-2) = -(-2) + 2 = 4$

$y = m \cdot x + t \Rightarrow -2 = 4 \cdot (-2) + t \Rightarrow t = 6$

$\Rightarrow y = 4x + 6$

$\tan \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \arctan 4 \approx 75{,}96^\circ$

$\alpha^* = 75{,}96^\circ - 45^\circ = 30{,}96^\circ$

$\Rightarrow \beta = 2 \cdot 30{,}96^\circ \approx 61{,}93^\circ$

c) I) $k(0) = h(0)$: Der Blattrand verläuft an der Nahtstelle ohne Sprung nahtlos weiter

II) $k'(0) = h'(0)$: Der Blattrand hat an der Nahtstelle keinen Knick

III) $k(-2) = h(-2)$: An der Spitze treffen sich die Blatthälften wie bisher

IV) $k'(-2) = 1{,}5$ Die Steigung von G_k ist bei -2 flacher, was bewirkt, dass an der Spitze der obere Blattrand die gezeichnete Krümmung besitzt und die Blattspitze einen kleineren Winkel bildet.