ABI 2014
Analysis
Aufgabengruppe 2

Prüfungsteil A

1 **1)** a) $x \longmapsto \sin(-x)$

1 b) $x \longmapsto \sin x + 2$

1 c) $x \longmapsto \sin 2x$

2) $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$

2 a) $f(x) = \underbrace{e^x}_{\neq 0} \cdot x \cdot (2+x) = 0 \implies x_1 = 0;\ x_2 = -2$

b) $F(x) = x^2 \cdot e^x$

$F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (2x + x^2) = f(x)$

1,5 $\implies F$ ist Stammfunktion von f

$G(x) = x^2 \cdot e^x + c$

$G(1) = 1^2 \cdot e + c \overset{!}{=} 2e \quad | -e$

$\implies c = e$

1,5 $\Rightarrow G(x) = x^2 \cdot e^x + e$

3) Der Graph einer Funktion hat genau dann einen Wendepunkt an einer Stelle x_0, wenn $g''(x_0) = 0$ und g'' zu dieser Stelle das Vorzeichen wechselt, d.h. $G_{g''}$ bei x_0 die x-Achse schneidet ✓

2 ✓ $\implies$ nur I hat zwei solche Stellen!

4) $A(x) = x \cdot (-\ln x) = -x \ln x$ ✓ $\quad 0 < x < 1$ (→ kein Randextremum)

$A'(x) = -1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -\ln x - 1$ ✓

$A''(x) = -\frac{1}{x}$

$A'(x) \overset{!}{=} 0 \iff -\ln x - 1 = 0 \iff \ln x = -1 \implies x = e^{-1}$ ✓

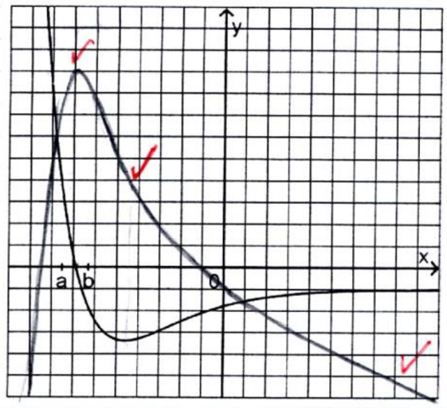
$A''(\frac{1}{e}) = -e < 0 \implies$ Maximum an der Stelle $\frac{1}{e}$ ✓

$\implies$ Länge: $l = \frac{1}{e}$

Breite: $b = f(\frac{1}{e}) = -\ln(e^{-1}) = \ln e = 1$ ✓

5) a) Da $F'(x) = f(x)$ und f in $[a;5]$ das Vorzeichen von + nach − wechselt, muss der Graph der Stammfunktion zunächst streng monoton steigen, dann einen Hochpunkt haben und dann streng monoton fallen. 2

b)



3

Prüfungsteil B

$$f(x) = \frac{20x}{x^2-25}$$

1a) Definitionsmenge: Nullstellen des Nenners:

$x^2-25 = (x-5)\cdot(x+5) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = -5,\ x_2 = 5$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$

Symmetrie: $f(-x) = \frac{20(-x)}{(-x)^2-25} = -\frac{20x}{x^2-25} = -f(x)$

$\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Nullstelle: $f(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 20x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

Asymptoten: waagrechte: $y = 0$

senkrechte: $x = -5$ und $x = 5$ 5

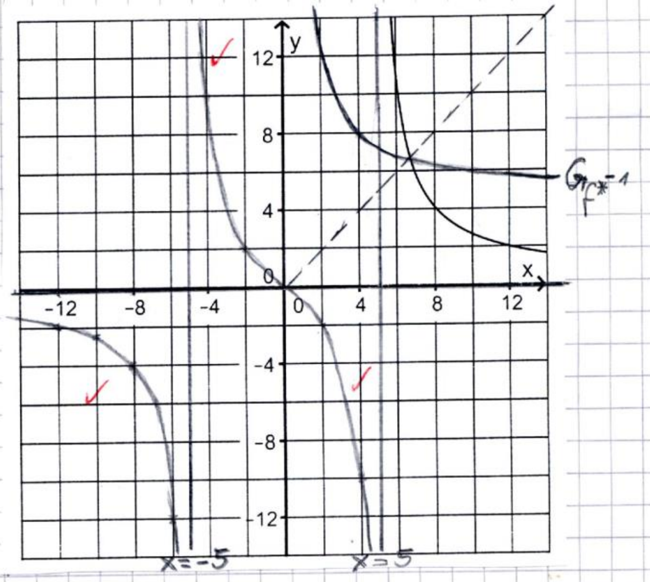
b) $f'(x) = \frac{(x^2-25)\cdot 20 - 20x\cdot 2x}{(x^2-25)^2} = \frac{20x^2-500-40x^2}{(x^2-25)^2} = \frac{-20x^2-500}{(x^2-25)^2}$

$= \frac{-(\overbrace{20x^2+500}^{>0})}{(x^2-25)^2} \begin{matrix} \}<0 \\ \}>0 \end{matrix} < 0 \Rightarrow$ negative Steigung

$f'(0) = \frac{-500}{(-25)^2} = -\frac{500}{625} = -0{,}8 = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \arctan(-0{,}8) \approx -38{,}7°$

$\Rightarrow$ Schnittwinkel $\approx 38{,}7°$ 4 c)

y = 0



3

d) Für f gibt es mehrere x-Werte, die denselben y-Wert besitzen (Parallele zu x-Achse schneidet G_f zweimal). Schränkt man D_f auf $]5; +\infty[$ ein, so gibt es für jeden y-Wert nur noch einen x-Wert (nur noch einen Schnittpunkt) und f^* ist damit umkehrbar.

2 + 2

e) $A(s) = \int_{10}^{s} \frac{20x}{x^2-25}\,dx = \int_{10}^{s} 10 \cdot \frac{2x}{x^2-25}\,dx$

$= [10 \ln|x^2-25|]_{10}^{s} = 10 \ln(s^2-25) - 10\ln(75)$

$= 10 \cdot (\ln(s^2-25) - \ln(75)) = 10 \cdot \ln \frac{s^2-25}{75}$

5

f) $10 \cdot \ln \frac{s^2-25}{75} \overset{!}{=} 100 \quad | :10$

$\ln \frac{s^2-25}{75} = 10 \quad | e^{\nearrow}$

$\frac{s^2-25}{75} = e^{10}$

$s^2 - 25 = 75e^{10} \quad | +25$

$s^2 = 75e^{10} + 25 \implies s = \underset{(-)}{+} \sqrt{75e^{10}+25}$

3

g) $\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \left(10 \cdot \ln \underbrace{\frac{\overset{\to+\infty}{s^2-25}}{75}}_{\to+\infty}\right)}_{+\infty} = +\infty$

2

2) $t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$ (Zeit in Stunden)
(x Eigengeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$)

a) $t(10) = \frac{10}{15} + \frac{10}{5} = 2\frac{2}{3}\,h = 2 \cdot 60min + 40min = 160min$

$t(20) = \frac{10}{25} + \frac{10}{15} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}\,h = 60min + 4min = 64min$

2

b) $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{10}{v}$

1. Summand: zur Eigengeschwindigkeit kommt die Fließgeschwindigkeit des Flusses dazu $\Rightarrow \frac{10}{x+5}$

2. Summand: da das Boot entgegen der Flussrichtung fährt, vermindert sich die Eigengeschwindigkeit um die Fließgeschwindigkeit des Flusses $\Rightarrow \frac{10}{x-5}$

3

c) Wäre die Eigengeschwindigkeit des Bootes kleiner als die Fließgeschwindigkeit des Flusses, so würde das Boot bei der Fahrt flussaufwärts rückwärts flussabwärts getrieben und käme nie mehr am Ausgangspunkt an! 2)

d) $t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5} = \frac{10\cdot(x-5)}{(x+5)(x-5)} + \frac{10\cdot(x+5)}{(x-5)(x+5)}$

$= \frac{10x \cancel{-50} + 10x \cancel{+50}}{x^2-25} = \frac{20x}{x^2-25} = f(x)$ 2

e) Man liest zur gewünschten Gesamtfahrzeit $\hat{=}$ y-Wert den entsprechenden x-Wert ab, der der Eigengeschwindigkeit des Bootes entspricht.

$t(x) = f(x) \overset{!}{=} 4$

$\frac{20x}{x^2-25} = 4 \quad | \cdot (x^2-25)$

$20x = 4x^2 - 100$

$4x^2 - 20x - 100 = 0$

$x^2 - 5x - 25 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 (\pm) \sqrt{25+100}}{2} \approx 8{,}1 \frac{km}{h}$

5