ABI 2014

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Prüfungsteil A

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c}_t = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1 a) $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$\frac{1}{2}$ $\vec{a} \circ \vec{c}_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} = 2 \cdot 4t + 1 \cdot 2t + 2 \cdot (-5t) =$

$= 8t + 2t - 10t = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}_t$

$\frac{1}{2}$ $\vec{b} \circ \vec{c}_t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} = -1 \cdot 4t + 2 \cdot 2t + 0 \cdot (-5t)$

$= -4t + 4t + 0 = 0 \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{c}_t$

$\Rightarrow$ alle Winkel zwischen den Seitenkanten betragen $90°$

$\Rightarrow$ der Körper ist ein Quader

b) $V_Q = G \cdot h$, $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ ✓

$|\vec{b}| = \sqrt{(-1) + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ ✓

$|\vec{c}_t| = \sqrt{(4t)^2 + (2t)^2 + (-5t)^2} = \sqrt{16t^2 + 4t^2 + 25t^2}$

$= \sqrt{45t^2} = 3\sqrt{5} \cdot |t|$ ✓

$V_Q = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}_t| = 3 \cdot \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \cdot |t| \stackrel{!}{=} 15$ ✓

3 $\Rightarrow t = \frac{1}{3}$ oder $t = -\frac{1}{3}$ ✓

oder:

$V_Q = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}_t| = \left| \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0-4 \\ -2-0 \\ 4-(-1) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} \right|$ ✓

$= |-4 \cdot 4t + (-2) \cdot 2t + 5 \cdot (-5t)| =$

$= |-16t - 4t - 25t| = |-45t| \stackrel{!}{=} 15$ ✓

3 $\Rightarrow t = \frac{1}{3}$ oder $t = -\frac{1}{3}$ ✓

alternativ:

$|\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}_t)| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -10t \\ -5t \\ -10t \end{pmatrix} \right| = |-20t - 5t - 20t| = |-45t|$

2. $M(-3|2|7)$, $P(3|4|4)$

a) $\vec{Q} = \vec{M} + \vec{PM} = \begin{pmatrix}-3\\2\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3-3\\2-4\\7-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\0\\10\end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q(-9|0|10)$ 3

b) $r = |\vec{PM}| = \sqrt{(-6)^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{36+4+9} = 7$

Da der Mittelpunkt M die x_3-Koordinate 7 hat, liegt er genau in Entfernung des Radius über der x_1x_2-Ebene und berührt diese deshalb. 2

Prüfungsteil B

a) $A_R = \overline{BC} \cdot \overline{CH} = 10 \cdot |\vec{CH}| = 10 \cdot \left|\begin{pmatrix}4-8\\10-10\\8-5\end{pmatrix}\right| = 10 \cdot \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}\right|$

$= 10 \cdot \sqrt{(-4)^2+0^2+3^2} = 10 \cdot 5 = 50\,FE = 50\,m^2$ 2

b) $\cos\alpha = \frac{\overline{CD}:2}{\overline{CH}} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}8) \approx 36{,}9° > 35°$ 3

<u>oder</u>: $\cos\alpha = \frac{\vec{CD}\circ\vec{CH}}{|\vec{CD}|\cdot|\vec{CH}|} = \frac{\begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{64}\cdot 5} = \frac{32}{8\cdot 5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}8) \approx 36{,}9° > 35°$

c) $E: 3x_1 + 4x_3 - 44 = 0$, $T(4|8|8)$

$t: \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 4+4\lambda \\ x_2 &= 8 \\ x_3 &= 8-3\lambda \end{aligned}$

t in E: $3\cdot(4+4\lambda) + 4(8-3\lambda) - 44 = 0$

$12 + 12\lambda + 32 - 12\lambda - 44 = 0$

$0 = 0$

$\Rightarrow$ gültig für alle $\lambda \Rightarrow t \in E$ 3

Da $HC \perp GH$ und $t \perp GH$ gilt für den Abstand von t und HC

$\overline{HT} = |\vec{HT}| = \left|\begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\10\\8\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+(-2)^2+0^2} = 2LE = 2m$ 2

3

d) $\left|\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+0^2+(-3)^2} = 5$ ✓

$\Rightarrow$ Richtungseinheitsvektor: $\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$ ✓

$\Rightarrow \vec{M} = \vec{T} + \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0{,}8\\0\\-0{,}6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}8\\8\\7{,}4\end{pmatrix}$ ✓

3 $\Rightarrow M(4{,}8|8|7{,}4)$

e) $m: \vec{X} = \begin{pmatrix}4{,}8\\8\\7{,}4\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$

$F: 3x_1 + 4x_3 - 49{,}6 = 0 \qquad \vec{n}_F = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \vec{n}_E$

$\Rightarrow$ E und F haben denselben Normalenvektor ✓

$\Rightarrow E \parallel F$

C um 3 in positive x_3-Richtung verschoben: $C^*(8|10|6{,}4)$ ✓

$\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\10\\6{,}4\end{pmatrix}\right] \stackrel{!}{=} 0$ ✓

$\Rightarrow 3x_1 + 4x_3 - (24 + 25{,}6) = 0$

$3x_1 + 4x_3 - 49{,}6 = 0 \Rightarrow F!$

(oder: $C^* \in F$ prüfen:

$3\cdot 8 + 4\cdot 6{,}4 - 49{,}6 = 0$ ✓

$\Rightarrow C^* \in F$ ✓)

3

f) N als Schnittpunkt von m und F

$m: \begin{aligned} x_1 &= 4{,}8 + 6\mu \\ x_2 &= 8 \\ x_3 &= 7{,}4 - \mu \end{aligned}$

in F: $3\cdot(4{,}8 + 6\mu) + 4\cdot(7{,}4 - \mu) - 49{,}6 = 0$ ✓

$14{,}4 + 18\mu + 29{,}6 - 4\mu - 49{,}6 = 0$

$14\mu = 5{,}6$

$\mu = 0{,}4$ ✓

3 $\stackrel{\text{in } m}{\Rightarrow} \vec{N} = \begin{pmatrix}4{,}8\\8\\7{,}4\end{pmatrix} + 0{,}4\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7{,}2\\8\\7\end{pmatrix} \Rightarrow N(7{,}2|8|7)$ ✓

1 $\Rightarrow L(7{,}2|8|5{,}6)$ ✓