Mathematik-Abitur 2014 - LÖSUNG (Ana+Stoch)

Analysis Aufgabengruppe 2

Teil A

1.

a) $g(x) = \sin(-x)$

b) $h(x) = \sin x + 2$

c) $k(x) = \sin(2x)$

2. $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$

a) $e^x \cdot (2x + x^2) = 0$

⇔ $e^x = 0$ oder $2x = -x^2$

⇔ Keine Lösung oder $x = 0$ oder $x = -2$

⇨ Nullstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = 0$

b) $F(x) = x^2 \cdot e^x$

es gilt: $F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x = f(x)$

⇨ F ist Stammfkt. von f

Allgemeine Stammfkt. von f: $F_a(x) = F(x) + a$ mit $a \in \mathbb{R}$

$F_a(1) = 2e$

$1^2 \cdot e^1 + a = 2e$

$e + a = 2e$

⇨ $a = e$

⇨ $G(x) = x^2 \cdot e^x + e$

3. Graph I

Wenn g im Intervall $-5 \leq x \leq 5$ zwei Wendepunkte besitzen soll, dann muss g'' in diesem Intervall ***zwei Nullstellen*** mit ***VZW*** haben.

Diese Bedingung erfüllt nur der Graph I.

4. Flächeninhalt des Rechtecks: $A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot (-\ln x)$

soll maximal werden: $f'(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + \cdot (-\ln x) = -1 - \ln x$

$f'(x) = 0$ => $\ln x = -1$ => $x = \frac{1}{e}$

Wirklich Maximum? $f''(x) = -\frac{1}{x}$ $f''\left(\frac{1}{e}\right) = -e < 0$ => Rechtskrümmung

=> Maximum an Stelle $x = \frac{1}{e}$

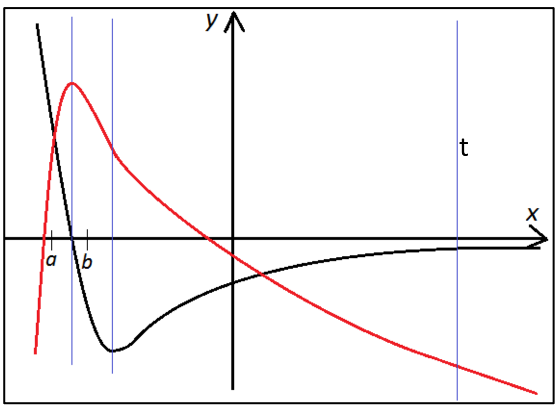
Seitenlängen dieses Rechtecks: $x = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$; $y = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln\left(\frac{1}{e}\right) = 1$

5.

a) Für $a \leq x \leq b$ ***steigt*** der Graph der Stammfunktion zunächst an und anschließend ***fällt*** der Graph.

b) siehe Abb. rechts

wichtig: Maximum, Wendepunkt, konst. Steigung für $x > t$



Teil B

1. $f(x) = \frac{20x}{x^2-25}$

a) Für $x_1 = -5$ und $x_2 = 5$ wird der Nenner des Funktionsterms null. Also sind x_1 und x_2 Definitionslücken. => $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-5; 5\}$

es gilt: $f(-x) = \frac{-20x}{(-x)^2-25} = \frac{-20x}{x^2-25} = -f(x)$ => G_f ist punktsym. zum Ursprung

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ (ist einzige Nullstelle)

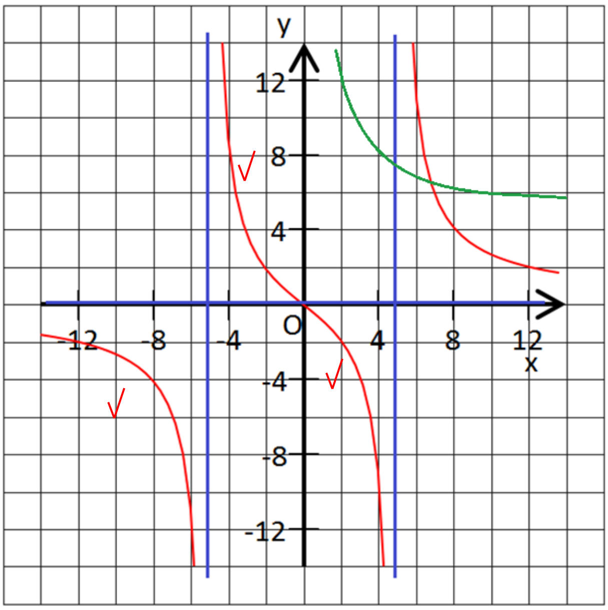
3 Asymptoten:
Senkrecht: $x = -5$; $x = 5$
Waagrecht: $y = 0$

b) $f'(x) = \frac{(20\cdot(x^2-25)-(20x)\cdot(2x))}{(x^2-25)^2} = \frac{(20x^2-500-40x^2)}{(x^2-25)^2} = \frac{(-500-20x^2)}{(x^2-25)^2}$

$f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{-5; 5\}$, da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit der Zähler für $x \in D_f$ negativ und der Nenner für$x \in D_f$ positiv sind.

$f'(0) = -\frac{500}{25^2} = -\frac{4}{5} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$ => $\alpha = \arctan(-\frac{4}{5}) \approx -38{,}66°$

c) Skizze (rot=) =>



d) geg.: $f^*: x \longmapsto f(x)$ mit $D_{f^*} =]5; +\infty[$
f ist in D_f nicht umkehrbar, da es z.B. ein $x_1 \in]-5; 0[$ und ein $x_2 \in]5; +\infty[$ gibt mit $f(x_1) = f(x_2)$.
Der Graph von f^* ist in D_{f^*} stetig und streng monoton fallend (weil $f'(x) < 0$ für alle $x \in R$). Daher ist f^* umkehrbar.
Graph G_{f^*} (grün) =>

e) $A(s) = \int_{10}^{s} f(x)\ dx = \int_{10}^{s} \frac{20x}{x^2-25}\ dx$
$= [10 \cdot \ln(x^2-25)]_{10}^{s}$
$= 10 \cdot \ln(s^2-25) - 10 \cdot \ln 75 = 10 \cdot \ln\frac{s^2-25}{75}$

f) $A(s) = 100$
$\ln\frac{s^2-25}{75} = 10$
$\frac{s^2-25}{75} = e^{10}$
$s^2 = 75 \cdot e^{10} + 25$
$s = \sqrt{75e^{10}+25}$ (negative Lösung scheidet aus, da $s > 10$)

g) $\lim_{s\to+\infty} A(s) = 10 \cdot \lim_{s\to+\infty}\left(\ln \underbrace{\frac{s^2+25}{75}}_{+\infty}\right) = +\infty$

2. $t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$

a) $t(10) = \frac{10}{15} + \frac{10}{5} = \frac{8}{3}$ [Stunden] => $t_{10} = 160\,min$

$t(20) = \frac{10}{25} + \frac{10}{15} = \frac{16}{15}$ [Stunden] => $t_{20} = 64\,min$

b) Es gilt: $v = \frac{s}{t}$

Bewegt sich ein Körper mit der konstanten Geschwindigkeit v, so benötigt er für die Strecke s die Zeit $t = \frac{s}{v}$.

Das Boot legt flussabwärts und flussaufwärts jeweils 10km zurück.

Bezüglich des Ufers beträgt die Geschwindigkeit des Bootes flussabwärts $(x+5)\frac{km}{h}$ und flussaufwärts $(x-5)\,\frac{km}{h}$.

Also benötigt das Boot flussabwärts die Zeit $t_{ab} = \frac{10km}{(x+5)\frac{km}{h}} = \frac{10}{x+5}\ h$ und flussaufwärts die Zeit $t_{auf} = \frac{10km}{(x-5)\frac{km}{h}} = \frac{10}{x-5}\ h$.

c) Für $0 < x < 5$ bewegt sich das Boot langsamer als das Wasser. D.h., das Boot bewegt sich immer flussabwärts. Es kehrt nie zum Ausgangspunkt zurück. Der Wert des Terms ist aber endlich.

d) $t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5} = \frac{10\cdot(x-5)}{(x+5)\cdot(x-5)} + \frac{10\cdot(x+5)}{(x-5)\cdot(x+5)} = \frac{10x-50+10x+50}{x^2-25} = \frac{20x}{x^2-25} = f(x)$

e) Die Fahrtzeit in Stunden entspricht dem y-Wert. Man sucht nun für diesen y-Wert den zugehörigen x-Wert (wobei $x > 5$ gelten muss). Dieser x-Wert entspricht der Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$.

$$t(x) = 4$$
$$\frac{20x}{x^2-25} = 4$$
$$20x = 4x^2 - 100$$
$$4x^2 - 20x - 100 = 0$$

$x_{1/2} = \frac{20\pm\sqrt{20^2-4\cdot4\cdot(-100)}}{2\cdot4} = \frac{20\pm20\sqrt{5}}{8}$ (negative Lösung scheidet wegen $x > 5$ aus)

Fahrtzeit: $x = \frac{20+20\sqrt{5}}{8} \approx 8{,}1\ \left[\frac{km}{h}\right]$

Stochastik Aufgabenteil 2

Teil A

1.

a) 3 Möglichkeiten:

1 rote und 4 weiße — *(r weg, w dazu)* $(2 \cdot 2 = 4$ *Möglichkeiten)*

2 rote und 3 weiße — *(r weg, r dazu oder w weg, w dazu)* $(2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$ *Möglichkeiten)*

3 rote und 2 weiße — *(w weg, r dazu)* $(3 \cdot 3 = 9$ *Möglichkeiten)*

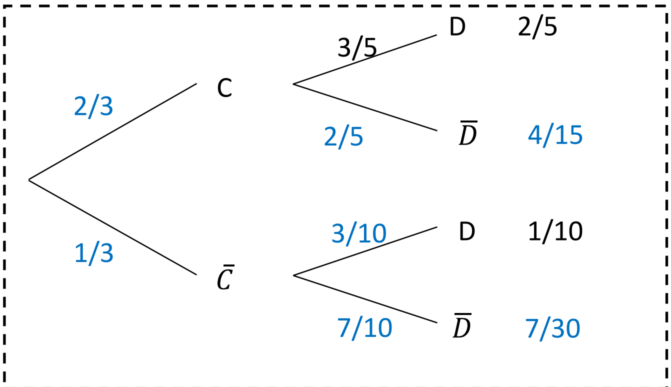
b) E: „3 weiße K. in Urne A“

Insgesamt gibt es $5 \cdot 6 = 30$ verschiedene (gleich wahrscheinliche) Möglichkeiten, das Zufallsexperiment durchzuführen.

Es gibt $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$ Möglichkeiten, am Ende 2 rote und 3 weiße Kugeln in der Urne A zu finden.

⇨ $P(E) = \frac{17}{30}$ => $P(\bar{E}) = 1 - \frac{17}{30} = \frac{14}{30} < P(E)$

2.



a) $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

b) Es gilt: $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{5} = P_C(D)$

Also sind die Ereignisse C und D voneinander abhängig

c) Es muss gelten: $P(D) = \frac{3}{5}$

=> $\frac{2}{5} + P(\bar{C} \cap D) = \frac{3}{5}$

=> $P(\bar{C} \cap D) = \frac{1}{5}$

Teil B

1.

a) $200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196$ = Anzahl der Möglichkeiten, für ein Päckchen 5 verschiedene Bilder auszuwählen

$|\Omega| = 200^5$ = Anzahl der Möglichkeiten, für ein Päckchen 5 Bilder auszuwählen, die sich nicht unbedingt unterscheiden müssen

$P = \frac{"günstige\ Ergebnisse"}{"mögliche\ Ergebnisse"}$

b) $P(\text{"nur vorhandene Bilder"}) = \left(\frac{185}{200}\right)^{10} \approx 45{,}9\,\%$

c) Zufallsvariable M: Anzahl der erhaltenen 3-D Bilder
$p = 0{,}1$

$P_{0,1}^{n}(M \geq 1) = 1 - P_{0,1}^{n}(M = 0)$
$1 - P_{0,1}^{n}(M = 0) > 0{,}99$
$P_{0,1}^{n}(M = 0) < 0{,}01$
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}1^{0} \cdot 0{,}9^{n} < 0{,}01$
$0{,}9^{n} < 0{,}01$
$n \cdot \ln 0{,}9 < \ln 0{,}01$
$n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9} \approx 43{,}7$

Das Kind muss mind. 44 Bilder „ziehen“.
$44 : 5 = 8{,}8$
Das Kind benötigt mind. 9 Packungen.

3.
a) 5 Sektoren
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
$360° : 15 = 24°$

$P(\text{"Eintrittskarte"}) = P(5) = \frac{5 \cdot 24°}{360°} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

b) $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{3}{15} + 4 \cdot \frac{4}{15} + 15 \cdot \frac{5}{15} = \frac{1+4+9+16+75}{15} = \frac{105}{15} = 7\ [€]$

(-1/2 BE, falls Ergebnis: 1€)

Das Spiel ist ungünstig für den Supermarkt. Auf lange Sicht macht der Supermarkt pro Spieldurchgang durchschnittlich 1€ Verlust.

c) $E_{neu}(X) = \frac{1+4+9+16+10 \cdot 5}{15} = \frac{80}{15} = 5\frac{1}{3}$
=> pro Spiel macht der Supermarkt im Schnitt einen Gewinn von $\frac{2}{3}\ € \approx 0{,}67\ €$
=> bei 6000 Spieldurchgängen ergibt das einen zu erwartenden Gewinn von $\frac{2}{3}\,€ \cdot 6000 = 4000\ €$