

Analysis Aufgabengruppe 2

Teil A

1.

a) $g(x) = \sin(-x)$ ✓

b) $h(x) = \sin x + 2$ ✓

c) $k(x) = \sin(2x)$ ✓

2. $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$

a) $e^x \cdot (2x + x^2) = 0$ ✗

$\Leftrightarrow e^x = 0$ ✗ oder $2x = -x^2$

\Leftrightarrow Keine Lösung ✗ oder $x = 0$ ✗ oder $x = -2$ ✗

\Rightarrow Nullstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = 0$

b) $F(x) = x^2 \cdot e^x$

es gilt: $F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x = f(x)$ ✓ ✗

$\Rightarrow F$ ist Stammfkt. von f

Allgemeine Stammfkt. von f : $F_a(x) = F(x) + a$ mit $a \in \mathbb{R}$

$F_a(1) = 2e$

$1^2 \cdot e^1 + a = 2e$

$e + a = 2e$

$\Rightarrow a = e$

$\Rightarrow G(x) = x^2 \cdot e^x + e$ ✓ ✗

3. Graph I

Wenn g im Intervall $-5 \leq x \leq 5$ zwei Wendepunkte besitzen soll, dann muss g'' in diesem Intervall **zwei Nullstellen** mit **VZW** haben. ✓

Diese Bedingung erfüllt nur der Graph I.

4. Flächeninhalt des Rechtecks:

$A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot (-\ln x)$ ✓

soll maximal werden:

$f'(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + (-\ln x) = -1 - \ln x$ ✓

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ ✓

Wirklich Maximum?

$f''(x) = -\frac{1}{x}$ $f''\left(\frac{1}{e}\right) = -e < 0 \Rightarrow$ Rechtskrümmung

\Rightarrow Maximum an Stelle $x = \frac{1}{e}$ ✓

Seitenlängen dieses Rechtecks:

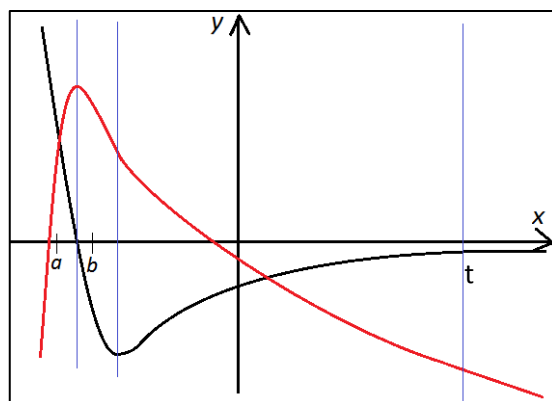
$x = \frac{1}{e} \approx 0,37$; $y = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln\left(\frac{1}{e}\right) = 1$ ✓

5.

a) Für $a \leq x \leq b$ steigt der Graph der Stammfunktion zunächst an und anschließend fällt der Graph. Die Stammfunktion hat also für ein $x \in]a; b[$ ein **Maximum**. ✓

b) siehe Abb. rechts

wichtig: Maximum, Wendepunkt, konst. Steigung für $x > t$ ✓ ✓ ✓



Teil B

1. $f(x) = \frac{20x}{x^2-25}$

- a) Für $x_1 = -5$ und $x_2 = 5$ wird der Nenner des Funktionsterms null. Also sind x_1 und x_2 Definitionslücken. $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$ ✓

es gilt: $f(-x) = \frac{-20x}{(-x)^2-25} = \frac{-20x}{x^2-25} = -f(x)$ ✓ $\Rightarrow G_f$ ist punktsym. zum Ursprung

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (ist einzige Nullstelle) ✓

3 Asymptoten:

Senkrecht: $x = -5$; $x = 5$ ✓

Waagrecht: $y = 0$ ✓

b) $f'(x) = \frac{(20 \cdot (x^2-25) - (20x) \cdot (2x))}{(x^2-25)^2} = \frac{(20x^2-500-40x^2)}{(x^2-25)^2} = \frac{(-500-20x^2)}{(x^2-25)^2}$ ✓

$f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$, da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit der Zähler für $x \in D_f$ negativ und der Nenner für $x \in D_f$ positiv sind. ✓

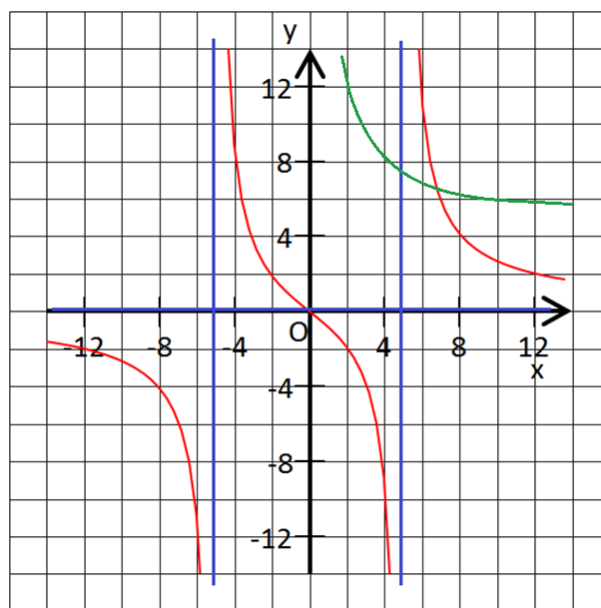
$f'(0) = -\frac{500}{25^2} = -\frac{4}{5} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \arctan(-\frac{4}{5}) \approx -38,66^\circ$ ✓

- c) Skizze (rot) \Rightarrow ✓ ✓ ✓

- d) geg.: $f^*: x \mapsto f(x)$ mit $D_{f^*} =]5; +\infty[$
 f ist in D_f nicht umkehrbar, da es z.B. ein $x_1 \in]-5; 0[$ und ein $x_2 \in]5; +\infty[$ gibt mit $f(x_1) = f(x_2)$. ✓

Der Graph von f^* ist in D_{f^*} stetig und streng monoton fallend (weil $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Daher ist f^* umkehrbar. ✓

Graph G_{f^*} (grün) \Rightarrow ✓ ✓



e) $A(s) = \int_{10}^s f(x) dx = \int_{10}^s \frac{20x}{x^2-25} dx$ ✓
 $= [10 \cdot \ln(x^2 - 25)]_{10}^s$ ✓ ✓
 $= 10 \cdot \ln(s^2 - 25) - 10 \cdot \ln 75 = 10 \cdot \ln \frac{s^2-25}{75}$ ✓

f) $A(s) = 100$

$\ln \frac{s^2-25}{75} = 10$ ✓

$\frac{s^2-25}{75} = e^{10}$

$s^2 = 75 \cdot e^{10} + 25$ ✓

$s = \sqrt{75e^{10} + 25}$ (negative Lösung scheidet aus, da $s > 10$) ✓

g) $\lim_{s \rightarrow +\infty} A(s) = 10 \cdot \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{s^2+25}{75} \right) = +\infty$ ✓ ✓

$$2. t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$$

$$a) t(10) = \frac{10}{15} + \frac{10}{5} = \frac{8}{3} \text{ [Stunden]} \Rightarrow t_{10} = 160 \text{ min } \checkmark$$

$$t(20) = \frac{10}{25} + \frac{10}{15} = \frac{16}{15} \text{ [Stunden]} \Rightarrow t_{20} = 64 \text{ min } \checkmark$$

$$b) \text{ Es gilt: } v = \frac{s}{t}$$

Bewegt sich ein Körper mit der konstanten Geschwindigkeit v , so benötigt er für die Strecke s die Zeit

$$t = \frac{s}{v}. \checkmark$$

Das Boot legt flussabwärts und flussaufwärts jeweils 10km zurück.

Bezüglich des Ufers beträgt die Geschwindigkeit des Bootes flussabwärts $(x + 5) \frac{km}{h}$ und flussaufwärts

$$(x - 5) \frac{km}{h}. \checkmark$$

Also benötigt das Boot flussabwärts die Zeit $t_{ab} = \frac{10km}{(x+5)\frac{km}{h}} = \frac{10}{x+5} h$ und flussaufwärts die Zeit

$$t_{auf} = \frac{10km}{(x-5)\frac{km}{h}} = \frac{10}{x-5} h. \checkmark$$

c) Für $0 < x < 5$ bewegt sich das Boot langsamer als das Wasser. D.h., das Boot bewegt sich immer flussabwärts. Es kehrt nie zum Ausgangspunkt zurück. Der Wert des Terms ist aber endlich. $\checkmark \checkmark$

$$d) t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5} = \frac{10 \cdot (x-5)}{(x+5) \cdot (x-5)} + \frac{10 \cdot (x+5)}{(x-5) \cdot (x+5)} = \frac{10x-50+10x+50}{x^2-25} = \frac{20x}{x^2-25} = f(x) \checkmark$$

e) Die Fahrtzeit in Stunden entspricht dem y-Wert. \checkmark Man sucht nun für diesen y-Wert den zugehörigen x-Wert (wobei $x > 5$ gelten muss). Dieser x-Wert entspricht der Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$. \checkmark

$$t(x) = 4$$

$$\frac{20x}{x^2-25} = 4 \checkmark$$

$$20x = 4x^2 - 100$$

$$4x^2 - 20x - 100 = 0 \checkmark$$

$$x_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-100)}}{2 \cdot 4} = \frac{20 \pm 20\sqrt{5}}{8}$$

(negative Lösung scheidet wegen $x > 5$ aus)

$$\text{Fahrtzeit: } x = \frac{20+20\sqrt{5}}{8} \approx 8,1 \left[\frac{km}{h} \right] \checkmark$$

Stochastik Aufgabenteil 2

Teil A

1.

a) 3 Möglichkeiten:

1 rote und 4 weiße

2 rote und 3 weiße

3 rote und 2 weiße ✓✓

(r weg, w dazu) ($2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten)

(r weg, r dazu oder w weg, w dazu) ($2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$ Möglichkeiten)

(w weg, r dazu) ($3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten)

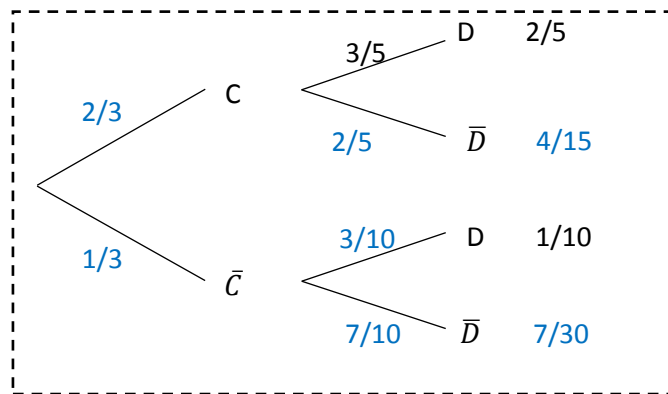
b) E: „3 weiße K. in Urne A“

Insgesamt gibt es $5 \cdot 6 = 30$ verschiedene (gleich wahrscheinliche) Möglichkeiten, das Zufallsexperiment durchzuführen.

Es gibt $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$ Möglichkeiten, am Ende 2 rote und 3 weiße Kugeln in der Urne A zu finden.

$$\Rightarrow P(E) = \frac{17}{30} \quad \Rightarrow \quad P(\bar{E}) = 1 - \frac{17}{30} = \frac{14}{30} < P(E) \quad \checkmark$$

2.



a) $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$

b) Es gilt: $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{5} = P_C(D) \quad \checkmark \quad \checkmark$

Also sind die Ereignisse C und D voneinander abhängig

c) Es muss gelten: $P(D) = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} + P(\bar{C} \cap D) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow P(\bar{C} \cap D) = \frac{1}{5} \quad \checkmark \quad \checkmark$$

Teil B

1.

a) $200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196 =$ Anzahl der Möglichkeiten, für ein Päckchen 5 verschiedene Bilder auszuwählen ✓

$|\Omega| = 200^5 =$ Anzahl der Möglichkeiten, für ein Päckchen 5 Bilder auszuwählen, die sich nicht unbedingt unterscheiden müssen ✓

$$P = \frac{\text{"günstige Ergebnisse"}}{\text{"mögliche Ergebnisse"}}$$

b) $P(\text{"nur vorhandene Bilder"}) = \left(\frac{185}{200}\right)^{10} \approx 45,9\% \quad \checkmark \checkmark \checkmark$

c) Zufallsvariable M: Anzahl der erhaltenen 3-D Bilder
 $p = 0,1$

$$P_{0,1}^n(M \geq 1) = 1 - P_{0,1}^n(M = 0) \quad \checkmark$$

$$1 - P_{0,1}^n(M = 0) > 0,99 \quad \checkmark$$

$$P_{0,1}^n(M = 0) < 0,01$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n < 0,01 \quad \checkmark$$

$$0,9^n < 0,01$$

$$n \cdot \ln 0,9 < \ln 0,01$$

$$n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9} \approx 43,7 \quad \checkmark$$

Das Kind muss mind. 44 Bilder „ziehen“.

$$44:5 = 8,8$$

Das Kind benötigt mind. 9 Packungen. \checkmark

3.

a) 5 Sektoren

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$360^\circ:15 = 24^\circ \quad \checkmark \quad \checkmark$$

$$P(\text{"Eintrittskarte"}) = P(5) = \frac{5 \cdot 24^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad \checkmark \quad \checkmark$$

b) $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{3}{15} + 4 \cdot \frac{4}{15} + 15 \cdot \frac{5}{15} = \frac{1+4+9+16+75}{15} = \frac{105}{15} = 7 \text{ [€]} \quad \checkmark$

Das Spiel ist ungünstig für den Supermarkt. \checkmark Auf lange Sicht macht der Supermarkt pro Spieldurchgang durchschnittlich 1€ Verlust. \checkmark

c) $E_{\text{neu}}(X) = \frac{1+4+9+16+10 \cdot 5}{15} = \frac{80}{15} = 5 \frac{1}{3} \quad \checkmark$

=> pro Spiel macht der Supermarkt im Schnitt einen Gewinn von $\frac{2}{3}$ € $\approx 0,67$ € \checkmark

=> bei 6000 Spieldurchgängen ergibt das einen zu erwartenden Gewinn von $\frac{2}{3}$ € $\cdot 6000 = 4000$ € \checkmark