ABI 2015

Analysis

Aufgabengruppe 1

Teil A

1) $f(x) = (x^3-8)\cdot(2+\ln x)$

1 **a)** $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ ✓

b) $f(x) \stackrel{!}{=} 0$

$(x^3-8)\cdot(2+\ln x) = 0$

$x^3-8=0 \quad \vee \quad 2+\ln x = 0$

$x^3 = 8 \qquad \ln x = -2$

2 $x_{01} = 2$ ✓ $\qquad x_{02} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ ✓

2) a) Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion g ✓

Die Funktionen f und h kommen nicht in Frage, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ ✓ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty$ ✓

(oder: G_f ist eine Parabel (✓), G_h müsste achsensymmetrisch zur y-Achse sein (✓))

3

2 **b)** $\int_0^1 h'(x)\,dx = [h(x)]_0^1 = [x^4+x^2+1]_0^1$ ✓ $= 1+1+1-(0+0+1) = 2$ ✓

1 **3) a)** $f(x) = \sin(6x)$, also $a = 6$ ✓

b) $g(x) = \sqrt{x^2-b}$

2 $x^2 - b \geq 0$ ✓ $\iff x^2 \geq b \underset{\substack{x\in\mathbb{R}\setminus]-2;2[\\ x^2\in[4;+\infty[}}{\Longrightarrow} b=4$ ✓

c) Die Funktion $k(x) = e^x$ hat den Wertebereich $W = \mathbb{R}^+$. Der Graph der Funktion $l(x) = -e^x$ ist im Vergleich zu G_k an der x-Achse gespiegelt, d.h. $W_l = \mathbb{R}^-$ ✓. Der Graph von h geht aus G_l durch Verschiebung von G_l um 4 LE nach

2 oben hervor, deshalb $W_h =]-\infty; 4[$ ✓

4) rechnerische Begründung:

Zu $H(x_H/y_H)$ bzw. $T(x_T/y_T)$ gilt $f'(x_H) = f'(x_T) = 0$.
Damit ist $x_1 = x_{H/T} - \frac{f(x_{H/T})}{f'(x_{H/T})}$ nicht definiert, da der Nenner Null ist.

geometrische Begründung:

Eine Tangente durch H bzw. T verläuft parallel zur x-Achse und schneidet diese nicht. 2

5) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \;;\; x \in \mathbb{R}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$
$f''(x) = 6x - 12$ ✓
$f'''(x) = 6$

$f''(x) \overset{!}{=} 0 \iff 6x - 12 = 0 \Rightarrow x_w = 2$ ✓
$f'''(2) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_w = 2$ ✓
$f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 11\cdot 2 - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0 \Rightarrow W(2|0)$ ✓

W in g: $0 = 2 - 2$ ✓ $\Rightarrow W \in g$ ✓ 3

b) $(2|0) \rightarrow (3|2)$, d.h. 1 LE nach rechts
2 LE nach oben

$h(x) = (x-1)^3 - 6\cdot(x-1)^2 + 11\cdot(x-1) - 4$ 1+1 2

Teil B

1) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$

a) $f(x) = \frac{1\cdot(x+3)}{(x+1)(x+3)} - \frac{1\cdot(x+1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{x+3-(x+1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{2}{(x+3)(x+1)}$ ✓✓

$\frac{2}{(x+3)(x+1)} = \frac{2}{x^2+x+3x+3} = \frac{2}{x^2+4x+3}$ ✓

$\frac{1}{0{,}5\cdot(x+2)^2-0{,}5} = \frac{1}{0{,}5(x^2+4x+4)-0{,}5} = \frac{1}{0{,}5x^2+2x+2-0{,}5} = \frac{2}{(0{,}5x^2+2x+1{,}5)\cdot 2}$

$= \frac{2}{x^2+4x+3}$ ✓✓

4

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{x+3}}_{\to 0}\right) = 0$ ✓ $\Rightarrow$ $y=0$ ist horizontale Asymptote

vertikale Asymptoten: $x = -3$ ✓ ; $x = -1$ ✓

$f(0) = \frac{1}{0+1} - \frac{1}{0+3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_y(0|\frac{2}{3})$ ✓

3

c) $f(x) = \frac{1}{p(x)}$ mit $p(x) = 0{,}5(x+2)^2 - 0{,}5$ und $x \in D_f$

$f'(x) = \frac{-p'(x)}{(p(x))^2}$

G_p ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(-2|-0{,}5)$. Nur in S besitzt die Parabel eine waagrechte Tangente, d.h. nur

2 hier gilt $p'(x)=0$ und damit $f'(x)=0$ ✓✓

Zudem fällt G_p bis zum Scheitel damit gilt für $x \in]-3;-2[$: $p'(x) < 0$ und damit

1 $f'(x) = \frac{\overbrace{-p'(x)}^{>0}}{\underbrace{(p(x))^2}_{>0}} > 0 \Rightarrow G_f$ ist in $]-3;-2[$ streng monoton steigend ✓

Analog steigt G_p ab dem Scheitel und es gilt für $x \in]-2;-1[$ $p'(x) > 0$ und damit

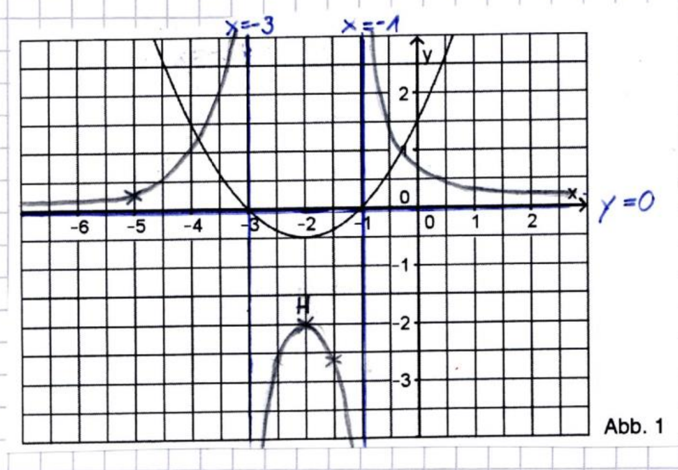
1 $f'(x) = \frac{\overbrace{-p'(x)}^{<0}}{\underbrace{(p(x))^2}_{>0}} < 0 \Rightarrow G_f$ ist in $]-2;-1[$ streng monoton fallend ✓

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $x_H = -2$

$f(-2) = \frac{1}{-2+1} - \frac{1}{-2+3} = -1-1 = -2 \Rightarrow H(-2|-2)$ 5

d) $f(-5) = \frac{1}{-5+1} - \frac{1}{-5+3} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$f(-1{,}5) = \frac{1}{-1{,}5+1} - \frac{1}{-1{,}5+3} = -2 - \frac{2}{3} = -2\frac{2}{3}$



4

2) $h(x) = \frac{3}{e^{x+1}-1}$; $\mathbb{D}_h =]-1; +\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{\underbrace{\underbrace{e^{\overset{x+1}{\to+\infty}}}_{\to+\infty} - 1}_{\to+\infty}}\right) = 0$

$h'(x) = \frac{(e^{x+1}-1)\cdot 0 - 3\cdot e^{x+1}}{(e^{x+1}-1)^2} = \frac{-3\overbrace{e^{x+1}}^{>0}}{(e^{x+1}-1)^2} \begin{matrix} \}<0 \\ \}>0 \end{matrix} < 0$ 4

b) $H_0(x) = \int\limits_0^x h(t)\,dt$

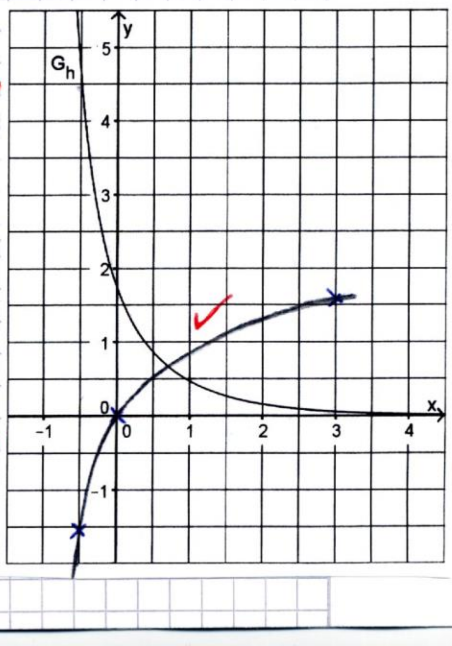
α) $H_0'(x) = h(x) > 0$ 2

$\Rightarrow G_{H_0}$ ist streng mon. steigend

β) $H_0''(x) = h'(x) < 0$ (siehe a))

$\Rightarrow G_{H_0}$ ist rechtsgekrümmt 2

4



c) Nullstelle von H_0: $x_0 = 0$

$H_0(-0{,}5) \approx \overset{(-1)}{-}\frac{1}{2}(4{,}5+1{,}7)\cdot 0{,}5 = \overset{(-1{,}4)}{-1{,}55}$

$H_0(3) \approx \frac{1}{2}(1{,}7+0{,}45)\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} \approx \underset{1{,}3}{1{,}58}$

6

3) $h(x) = \frac{3}{e^{x+1}-1}$; $\quad x \geq 0$

a) $h(x) \overset{!}{=} 0{,}01$

$$\frac{3}{e^{x+1}-1} = 0{,}01 \qquad | \cdot (e^{x+1}-1)$$

$$3 = 0{,}01e^{x+1} - 0{,}01 \qquad | + 0{,}01$$

$$3{,}01 = 0{,}01e^{x+1} \qquad | : 0{,}01$$

$$301 = e^{x+1} \qquad | \ln$$

$$\ln 301 = x + 1 \qquad | -1$$

$$\rightarrow x = \ln 301 - 1 \approx 4{,}7$$

Nach etwa 4,7 min ist die momentane Schadstoffabbaurate auf 0,01 Gramm pro Minute zurückgegangen

3

b) $k(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) - 0{,}2$; $\quad \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$

G_k geht aus G_f durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3 und anschließender Verschiebung um 0,2 LE in y-Richtung nach unten hervor.

2

c) $\int_0^1 k(x)\,dx = \int_0^1 \left(3 \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) - 0{,}2\right) dx$

$= \left[3\left(\ln|x+1| - \ln|x+3|\right) - 0{,}2x\right]_0^1$

$= 3 \cdot (\ln 2 - \ln 4) - 0{,}2 - (3 \cdot (\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 3) - 0)$

$= 3 \ln \frac{1}{2} - 0{,}2 + 3 \ln 3 \approx 1{,}02$

Innerhalb der ersten Minute werden insgesamt in etwa 1,02 Gramm Schadstoffe in dem Wasser abgebaut.

5