ABI 2016

Analysis

Aufgabengruppe 1

Prüfungsteil A

1) $f: x \mapsto \sqrt{1-\ln x}$

a) $1-\ln x \geq 0$

$1 \geq \ln x \quad | e$

$e \geq e^{\ln x} = x \quad \Rightarrow D_{max} =]0; e]$

b) $f(x) = 2$

$\sqrt{1-\ln x} = 2 \quad | \,^2$

$1-\ln x = 4 \quad | -4 + \ln x$

$-3 = \ln x \quad | e^{\cdot}$

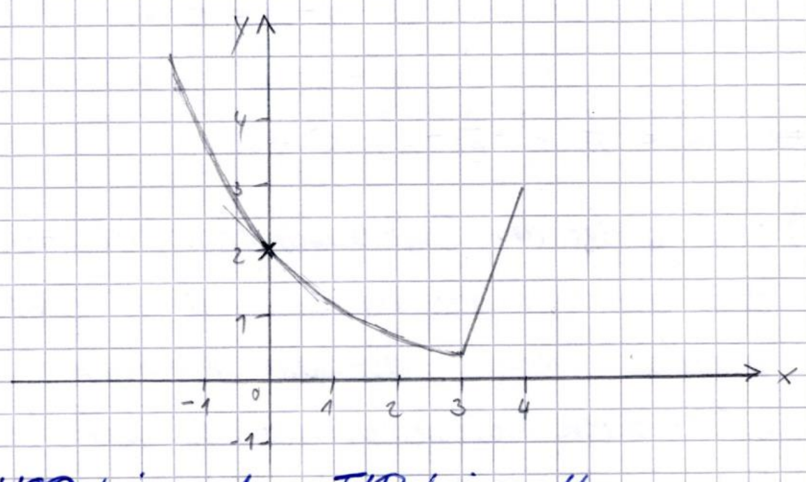
$e^{-3} = x$

2) $g(-x) = (-x)^2 \cdot \sin(-x) = x^2 \cdot (-\sin x) = -x^2 \sin x$

$= -g(x) \Rightarrow$ G_g ist punktsymmetrisch zum Ursprung

$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx = 0$

3)



4) HOP bei $x = 1$; TIP bei $x = 4$

a)
- f dritten Grades $\Rightarrow f'$ zweiten Grades, d.h. $G_{f'}$ Parabel
- an Extremstellen x_e muss gelten $f'(x_e) = 0$ (waagrechte Tangente) $\Rightarrow f'(1) = f'(4) = 0$
- die Parabel ist nach oben geöffnet, da f vor dem HOP zunehmend und damit $f'(x) > 0$, zwischen HOP und TIP abnehmend ($f'(x) < 0$), danach wieder zunehmend ($f' > 0$)

sein muss

b) Da eine Parabel symmetrisch ist, liegt ihr Scheitel genau in der Mitte der Nullstellen, also bei $x_S = \frac{1+4}{2} = 2{,}5$
Dies ist der TIP der Parabel, also gilt: $f''(2{,}5) = 0$ und wegen a) $f'(2{,}5) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt von G_f

5) a)

$$\int_3^5 f(x)\,dx = A_{Trapez}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(0{,}7+1{,}6)\cdot 2$$
$$= 2{,}3$$

$F(3) = 0$

b) $F'(2) = f(2) = 0{,}5$

c) $\int_3^6 f(x)\,dx = [F(x)]_3^6 = F(6) - \underbrace{F(3)}_{=0} = F(6)$

<u>Prüfungsteil B</u>

1) $f: x \longmapsto e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

a) $f(0) = e^{\frac{1}{2}\cdot 0} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} = e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow S_y(0|2)$

$f(x) = \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{>0} + \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{>0} > 0$

b) $f(-x) = e^{\frac{1}{2}(-x)} + e^{-\frac{1}{2}(-x)} = e^{-\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x} = f(x)$

$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{2}x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} + \underbrace{e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x}^{\to +\infty}}}_{\to +\infty} \right) = +\infty \underset{\text{wegen Achsensymmetrie}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty}$

c) $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + (-\frac{1}{2})\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\cdot(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x})$

$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - (-\frac{1}{2})\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right)$

$= \underbrace{\frac{1}{4}}_{>0}\cdot\underbrace{f(x)}_{>0 \text{ (siehe a))}} > 0$

$f''(x) > 0 \Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt

d) $f'(x) \overset{!}{=} 0 \iff \underbrace{\frac{1}{2}}_{\neq 0}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right) = 0$

$\iff e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} = 0$

$\iff e^{\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x} \iff \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x \Rightarrow x = 0$

für $x < 0$ gilt: $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0}\cdot\underbrace{\left(\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{<1} - \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{>1}\right)}_{<0} < 0 \Rightarrow G_f$ ist streng monoton fallend

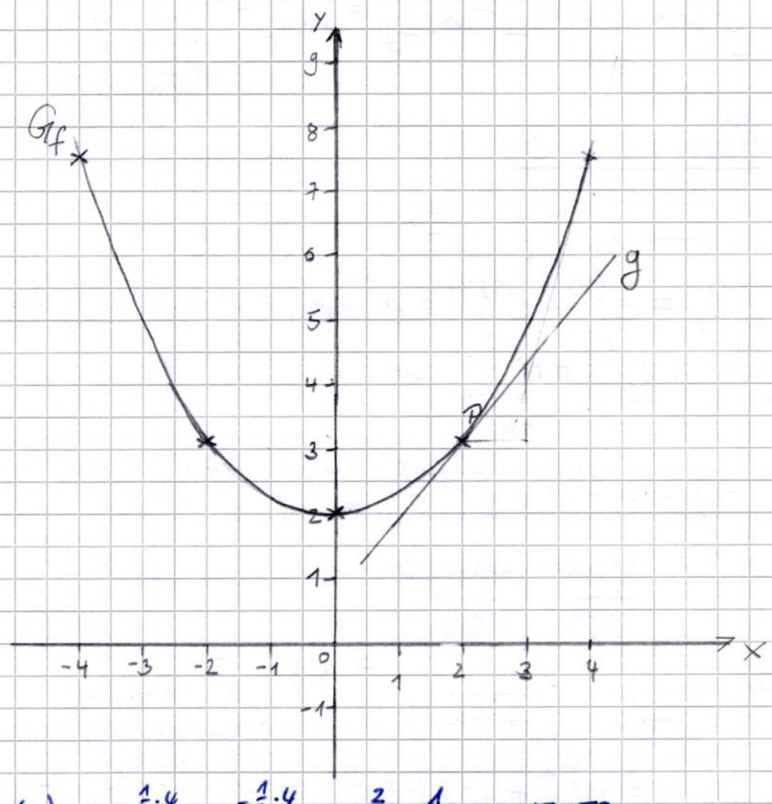
für $x > 0$ gilt: $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0}\underbrace{\left(\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{>1} - \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{<1}\right)}_{>0} > 0 \Rightarrow G_f$ ist streng monoton steigend

oder: $f''(x) > 0$ (siehe c))

$\Rightarrow$ $(0|2)$ ist globaler Tiefpunkt

e) $f(2) = e^{\frac{1}{2}\cdot 2} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 2} = e + \frac{1}{e} \approx 3{,}1 \Rightarrow P(2|\approx 3{,}1)$

$m_g = f'(2) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot 2} - e^{-\frac{1}{2}\cdot 2}\right) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \approx 1{,}2$



f) $f(4) = e^{\frac{1}{2}\cdot 4} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = e^2 + \frac{1}{e^2} \approx 7{,}52$

g) $\frac{1}{4}\cdot\left[e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]^2$

$= \frac{1}{4}\cdot\left(e^x + 2e^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x} + e^{-x}\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(e^x - 2e^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x} + e^{-x}\right)$

$= \frac{1}{4}\cdot\left(e^x + 2e^0 + e^{-x} - e^x + 2e^0 - e^{-x}\right) = \frac{1}{4}\cdot 4\underbrace{e^0}_{=1} = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$ qed

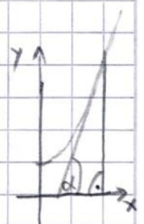
h) $L_{0;6} = \int_0^6 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_0^6 \sqrt{\frac{1}{4}[f(x)]^2 - [f'(x)]^2 + [f'(x)]^2}\,dx$

$= \int_0^6 \sqrt{\frac{1}{4}[f(x)]^2}\,dx = \int_0^6 \left(\frac{1}{2} f(x)\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^6 \left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\left[2e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^6 = \frac{1}{2}\left[2e^{\frac{1}{2}6} - 2e^{-\frac{1}{2}6} - \underbrace{(2e^0 - 2e^0)}_{=0}\right]$

$= \frac{1}{2}\cdot 2e^{\frac{1}{2}6} - \frac{1}{2}\cdot 2e^{-\frac{1}{2}6} = e^{\frac{1}{2}6} - e^{-\frac{1}{2}6}$

2) a) $d = f(4) - f(0) = 7{,}52 - 2 = 5{,}52\,m$



b) $f'(4) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot 4} - e^{-\frac{1}{2}\cdot 4}\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) = \tan\alpha$

$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)\right) \approx 74{,}6°$

$\Rightarrow$ Winkel zwischen Mast und Seil: $180° - 90° - 74{,}6° = 15{,}4°$

$l_{Seil} = 2\cdot L_{0;4} = 2\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot 4} - e^{-\frac{1}{2}\cdot 4}\right) = 2\cdot\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) \approx 14{,}51\,m$

c) Scheitel $(0|2)$ $\Rightarrow$ $q(x) = ax^2 + 2$

$f(4) = e^2 + \frac{1}{e^2}$ $\Rightarrow$ $e^2 + \frac{1}{e^2} = a\cdot 16 + 2$

$e^2 + \frac{1}{e^2} - 2 = a \cdot 16$

$\Rightarrow a = \frac{1}{16}\left(e^2 + \frac{1}{e^2} - 2\right)$

$\Rightarrow q(x) = \frac{1}{16}\left(e^2 + \frac{1}{e^2} - 2\right)\cdot x^2 + 2$

d) Man bildet die Differenzfunktion $q(x) - f(x) = d(x)$ und bestimmt das Maximum dieser Differenzfunktion, indem man die Ableitung $d'(x)$ bildet, deren Nullstelle(n) bestimmt und die Funktionswerte der Nullstelle(n). Der größte Wert entspricht dann dem größten Abstand.