ABI 2017
Analysis 2

Teil A

1) $f(x)=\frac{(3+x)^2}{x-1}$

3 a) $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $S_x(-3|0)$; $S_y(0|-9)$

b) $x+7+\frac{16}{x-1}=\frac{(x+7)(x-1)+16}{x-1}=\frac{x^2+7x-x-7+16}{x-1}$

$=\frac{x^2+6x+9}{x-1}=\frac{(x+3)^2}{x-1}=\frac{(3+x)^2}{x-1}=f(x)$

3 $y=x+7$ ist schräge Asymptote für G_f

2) $f(x)=2\cdot e^{\frac{1}{2}x}-1$; $x\in\mathbb{R}$

a) $f(x)\overset{!}{=}0 \iff 2e^{\frac{1}{2}x}-1=0$

$e^{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}$ | ln

2 $\frac{1}{2}x=\ln\frac{1}{2} \Rightarrow x_0=2\ln\frac{1}{2}$

b) $f'(x)=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow m=f'(0)=e^0=1$

$y=m\cdot x+t \Rightarrow 1=1\cdot 0+t \Rightarrow t=1 \Rightarrow y=x+1$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x(-1|0)$

y-Achse: $S_y(0|1)$ $\Big\}$ $|-1|=|1|$ qed

3

3) $g(x)=p+q\cdot\sin\left(\frac{\pi}{r}x\right)$; $p,q,r\in\mathbb{N}$

3 a) $p=3$; $q=2$; $r=5$ $\left(\frac{2\pi}{\frac{\pi}{r}}=10 \iff 2\pi\cdot\frac{r}{\pi}=10\right)$

1 b) $h(x)=g(x-2)=3+2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{5}(x-2)\right)$

4) $n(t)=3t^2-60t+500$

3 a) $m_s=\frac{n(2)-n(0)}{2-0}=\frac{12-120+500-500}{2}=\frac{-108}{2}=-54\left[\frac{1}{h}\right]$

b) $n'(t)=6t-60\overset{!}{=}-30$

2 $6t=30 \Rightarrow t=5 \Rightarrow$ nach 5 Stunden

Teil B

1) $f(x) = 2e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 1) = 4e^{-2x} - 2e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$; $x_0 = \ln 2$

a) $f'(x) = -2e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 1) + 2e^{-x} \cdot (-2e^{-x}) = -4e^{-2x} + 2e^{-x} - 4e^{-2x}$

$= 2e^{-x} - 8e^{-2x} = 2e^{-x} \cdot (1 - 4e^{-x})$.

oder:

$f'(x) = 4 \cdot e^{-2x} \cdot (-2) - 2e^{-x}(-1) = -8e^{-2x} + 2e^{-x} = 2e^{-x} \cdot (1 - 4e^{-x})$ 3

b) $f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \iff \underbrace{2e^{-x}}_{>0} \cdot (1 - 4e^{-x}) = 0$

$1 - 4e^{-x} = 0$

$e^{-x} = \frac{1}{4} \quad | \ln$

$-x = -\ln 4 \Rightarrow x_1 = \ln 4$

$1 - 4e^{-x} < 0$
$1 < 4e^{-x}$
$\frac{1}{4} < e^{-x}$
$\ln\frac{1}{4} < -x \quad | \cdot(-1)$
$\ln 4 > x$

analog $1 - 4e^{-x} > 0$
$\ln 4 < x$

$f''(x) = -2e^{-x} + 16e^{-2x}$

$f''(\ln 4) = -2 \cdot e^{-\ln 4} + 16e^{-2\ln 4} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow$ Minimum bei $x_1 = \ln 4 \Rightarrow TIP(\ln 4 / -\frac{1}{4})$

$f(\ln 4) = 4e^{-2\ln 4} - 2e^{-\ln 4} = 4 \cdot \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

x	$x < \ln 4$	$x = \ln 4$	$x > \ln 4$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
G_f	streng mon. fallend	TIP	streng mon. steigend

$f(\ln 4) = -\frac{1}{4} \Rightarrow TIP(\ln 4 / -\frac{1}{4})$

4

c) $F(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$; $x \in \mathbb{R}$; z.z.: $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = -2e^{-x} - 2e^{-2x}(-2) = -2e^{-x} + 4e^{-2x} = f(x)$ qed

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{2e^{\overset{\to -\infty}{-x}}}_{\to 0} - \underbrace{2e^{\overset{\to -\infty}{-2x}}}_{\to 0} \right) = 0 - 0 = 0$ 3

d) mit $F'(x) = f(x)$ und Abb. 1 folgt:

$F'(x) = 0$ für $x_0 = \ln 2$ (einzige Nst.)

$F'(x) > 0$ für $x < \ln 2$ sowie $F'(x) < 0$ für $x > \ln 2$ 2

$\Rightarrow$ F hat bei $x_0 = \ln 2$ einen globalen $HOP(\ln 2 / 0{,}5)$

und damit keine größeren Werte als 0,5

$F''(x) = f'(x) = 0$ für $x_1 = \ln 4$ (1b)

$F'''(\ln 4) = f''(\ln 4) = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $x_1 = \ln 4$

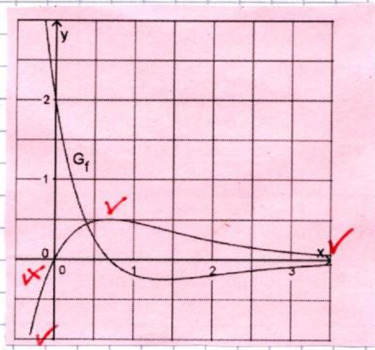
$F(\ln 4) = 2 \cdot e^{-\ln 4} - 2 \cdot e^{-2\ln 4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \Rightarrow WP(\ln 4 / \frac{3}{8})$ 2

1

Wendestelle von F
$\hat{=}$ Extremstelle von $F' = f$
$\stackrel{(1b)}{\Longrightarrow}$ bei $x_1 = \ln 4$

bzw. $F' = f$ hat bei $x_1 = \ln 4$ einen TIP
$\Rightarrow F''(x) = f'(x)$ hat wie eine Nst. mit VZW (1b)
$\Rightarrow$ F hat eine Wendestelle

e)



$F(0) = 2e^{0} - 2e^{0} = 2 - 2 = 0$

4

(1) f) $A_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \cdot 2 = \ln 2 \approx 0{,}6931$

$A = \int_0^{\ln 2} \left(2e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 1)\right) dx = \left[2e^{-x} - 2e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}$

(2) $= 2e^{-\ln 2} - 2e^{-2\ln 2} - \left(2e^{0} - 2e^{-2 \cdot 0}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} - (2-2) = 0{,}5$

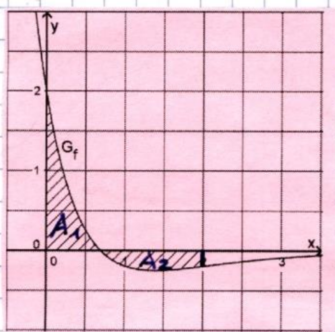
(1) Abweichung in %: $\frac{\ln 2 - 0{,}5}{0{,}5} \cdot 100\% \approx 38{,}63\,\%$

4

g) $F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_0^x = F(x) - F(0)$

(2) $= 2e^{-x} - 2e^{-2x} - (2 - 2) = 2e^{-x} - 2e^{-2x} = F(x)$

$F_0(2) \approx 0{,}234$ beschreibt den Wert der Flächenbilanz in $I = [0;2]$, also $A_1 - A_2$:



(2)

4

h) Integralfunktion muss Nullstelle haben → aus G_F:

$F(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x} - 1$

2

2) a) Einheit 6min $\Rightarrow$ 12 min $\hat{=}$ $x = 2$ ✓

$B(2) = e^{-2\cdot 2} = e^{-4} \approx 1{,}8\,\%$ ✓

$F(2) = 2e^{-2} - 2e^{-4} \approx 23{,}4\,\%$ ✓

$P(2) = 100\,\% - 1{,}8\,\% - 23{,}4\,\% = 74{,}8\,\%$ ✓ 4

b) Anteil am größten beim Maximum von F

$\overset{1d)}{\Rightarrow}$ HOP$(\ln 2 \,|\, 0{,}5) \Rightarrow$ bei $x = \ln 2 \approx 0{,}6931$ ✓

$\hat{=} \ln 2 \cdot 6 \cdot 60\,s \approx 250\,s$ ✓ 2

c) $B(x) = F(x)$

$e^{-2x} = 2e^{-x} - 2e^{-2x} \quad | + 2e^{-2x}$

$3e^{-2x} = 2e^{-x} \quad | : 2 \,|\, : e^{-2x}$

$\frac{3}{2} = e^{-x-(-2x)}$

$\frac{3}{2} = e^{x} \Rightarrow x = \ln \frac{3}{2}$ (2)

$\left.\begin{array}{l} B(\ln 1{,}5) = e^{-2\ln 1{,}5} = \frac{4}{9} = F(\ln 1{,}5) \\ P(\ln 1{,}5) = 1 - \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9} \end{array}\right\} \neq$ (1) 3

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \underbrace{e^{\overset{\to -\infty}{-2x}}}_{\to 0} - \left(\underbrace{2e^{\overset{\to -\infty}{-x}}}_{\to 0} - \underbrace{2e^{\overset{\to -\infty}{-2x}}}_{\to 0}\right)\right) = 1 = 100\,\%$ ✓

Dies bedeutet, dass nach sehr langer Zeit im Gefäß 100 % Pb207 Kerne sind und keine anderen mehr / alle Kerne in Pb207 Kerne umgewandelt sind. ✓

2