ABI 2017
Geometrie
2

Teil A

1) $A(2|3|1)$; $B(2|-3|1)$; $C(0|2|0)$

a) $\vec{CA} \circ \vec{CB} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} = 2\cdot 2 + 1\cdot(-5) + 1\cdot 1 = 4-5+1 = 0$ ✓

$\Rightarrow \vec{CA} \perp \vec{CB}$ d.h. rechter Winkel bei C ✓

3

b) Auch D muss symmetrisch zu C bzgl. der x_1x_3-Ebene sein, dann ist ΔABD das Spiegeldreieck zu ΔABC und die Winkel sind gleich groß ✓ $\Rightarrow D(0|-2|0)$ ✓

2

2) $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$

a) x_1-Achse: $x_2 = 0; x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -18 \Leftrightarrow x_1 = -9$

$\Rightarrow S_{x_1}(-9|0|0)$ ✓

x_2-Achse: $x_1 = 0; x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -18 \Rightarrow S_{x_2}(0|-18|0)$ ✓

rechter Winkel bei 0: $A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot|-9|\cdot|-18| = 81$ FE ✓

oder: $A_{\Delta 0S_{x_1}S_{x_2}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{0S}_{x_1} \times \vec{0S}_{x_2}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-9\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-18\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\162\end{pmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}\cdot\left|\sqrt{0^2+0^2+162^2}\right| = \frac{1}{2}\cdot 162 = 81$ FE

2

b) $\vec{v} = k\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ ✓ in E: $2\cdot 2k + k - 2\cdot(-2k) = -18$ ✓

$4k + k + 4k = -18$

$9k = -18 \Rightarrow k = -2$ ✓

$\Rightarrow \vec{v} = -2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}$ ✓

3

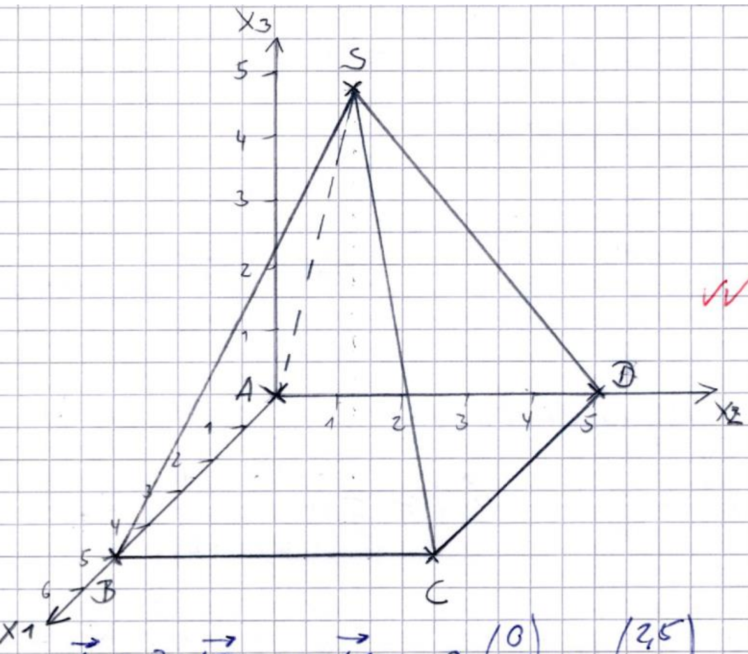
Teil B

$S(2{,}5|2{,}5|6)$; $A(0|0|0)$; $C(5|5|0)$

$B \in x_1$-Achse; $D \in x_2$-Achse;

$\Delta CDS \in E: 12x_2 + 5x_3 = 60$ 1LE ≙ 1m

a) $B(5|0|0)$ ✓; $D(0|5|0)$ ✓



3

b) $F: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{AD} + \mu \cdot \vec{AS} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30-0 \\ 0-0 \\ 0-12{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -12{,}5 \end{pmatrix} = 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

$F: \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \iff 12x_1 + 0x_2 - 5x_3 - 0 = 0$

$\Rightarrow F: 12x_1 - 5x_3 = 0$

3

c) Winkel zwischen E und F = $\varphi = \sphericalangle(\vec{n}_E ; \vec{n}_F)$

$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_F}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}}{\sqrt{12^2+5^2} \cdot \sqrt{12^2+(-5)^2}} = \frac{-25}{13 \cdot 13}$

$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(-\frac{25}{169}\right) \approx 98{,}5°$

3

d) Gerade l durch S und senkrecht zur x_1x_2-Ebene:

$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2{,}5 \\ x_2 = 2{,}5 \\ x_3 = 6 + \alpha \end{cases}$

HNF von F: $\frac{1}{13} \cdot (12x_1 - 5x_3) = 0$

$d(L;F) \overset{!}{=} 0{,}5 \underset{L \in l}{\Longrightarrow} \left| \frac{1}{13}(12 \cdot 2{,}5 - 5 \cdot (6+\alpha)) \right| \overset{!}{=} 0{,}5$

$\frac{1}{13} | 30 - 30 - 5\alpha | = 0{,}5 \quad | \cdot \frac{1}{13}$

$|-5\alpha| = 6{,}5$

$u: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit g aus e) schneiden

schneller:
$L(2{,}5 | 2{,}5 | x_3)$

$\left| \frac{1}{13}(12 \cdot 2{,}5 - 5 \cdot x_3) \right| \overset{!}{=} 0{,}5$

$|30 - 5x_3| = 6{,}5$

① $30 - 5x_3 = 6{,}5$
$5x_3 = 23{,}5$
$x_3 = 4{,}7$
$\Rightarrow L(2{,}5|2{,}5|4{,}7)$

oder

② $30 - 5x_3 = -6{,}5$
$36{,}5 = 5x_3$
$7{,}3 = x_3$ ↯

$-5\alpha = 6{,}5$ oder $-5\alpha = -6{,}5$

$\alpha_1 = -1{,}3$ ✓ $\alpha_2 = 1{,}3$ ↯ da $l < 6m$

α_1 in l $\Rightarrow$ $\vec{L} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} - 1{,}3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 4{,}7 \end{pmatrix}$ ✓ $\Rightarrow L(2{,}5|2{,}5|4{,}7)$

4

e) Mittelpunkt M von $[CD]$: $M(2{,}5|5|0)$ ✓

$\left(\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{C} + \vec{D}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$g: \vec{x} = \vec{M} + \beta \cdot \vec{MS} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓

f) Punkt V der Öffnung oben rechts:

$V(1{,}8|v_2|1{,}8)$ ✗

V in E: $12 \cdot v_2 + 5 \cdot 1{,}8 = 60$ ✓

$12 v_2 + 9 = 60 \quad |-9 \; :12$

$v_2 = \frac{51}{12} = 4{,}25$ ✗

Punkt U der Öffnung unten rechts:

$U(1{,}8|5|0)$ ✗

Länge des Vordachs: $|\vec{UV}| = \left|\begin{pmatrix} 1{,}8 - 1{,}8 \\ 4{,}25 - 5 \\ 1{,}8 - 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}75 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}\right|$ ✗

$= \sqrt{0^2 + (-0{,}75)^2 + 1{,}8^2} = 1{,}95\,(m)$ ✓

$\Rightarrow A_R = l \cdot b = 1{,}95m \cdot 1{,}40m = 2{,}73\,m^2$ ✓

oder:
Ebene G mit $G \parallel x_1x_2$-Ebene im Abstand $1{,}8m$:
$x_3 = 1{,}8$ ✓

$g \cap G$: g in G

$6\beta = 1{,}8$ ✓
$\beta = 0{,}3$

in g: $\vec{H} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{H} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4{,}25 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$ ✗ ✗

$l_R = |\vec{MH}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}75 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}\right|$

$= \sqrt{0^2 + (-0{,}75)^2 + 1{,}8}$

$= 1{,}95$ ✓

$A_R = \ldots = 2{,}73 m^2$ ✓

5