ABI 2018
Analysis 2
A

Aufgabe 1

$f(x) = \sqrt{3x-5}$; $3x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow \mathbb{D} = [\frac{5}{3}; +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x-5}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$; $m = f'(3) = \frac{3}{2\sqrt{9-5}} = \frac{3}{4}$; $f(3) = 2$ 2

$y = mx + t \Rightarrow 2 = \frac{3}{4} \cdot 3 + t \Rightarrow t = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$ 4

$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

6

Aufgabe 2

$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$

$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$

(1) $f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 15 = -15 = m_1$ 1,5

(2) $f'(5) = -3 \cdot 5^2 + 18 \cdot 5 - 15 = -75 + 90 - 15 = 0 = m_2$

$f(5) = -125 + 9 \cdot 25 - 15 \cdot 5 - 25 = -125 + 225 - 75 - 25 = 0$

Da A auf der x-Achse liegt und $m_2 = 0$ ist die x-Achse Tangente

(oder: $y = 0 \cdot x + t$ mit A: $0 = 0 \cdot 5 + t \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y = 0$) 1,5

(3) $f'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) - 15 = -3 - 18 - 15 = -36 = m_3$

$f(-1) = -(-1)^3 + 9(-1)^2 - 15 \cdot (-1) - 25 = 1 + 9 + 15 - 25 = 0$

$y = m_3 \cdot x + t \Rightarrow 0 = -36 \cdot (-1) + t \Rightarrow t = -36 \Rightarrow y = -36x - 36$ qed 2

5

Aufgabe 3

F hat an der unteren Integralgrenze eine Nullstelle.
Da der Graph G_f für $x > 3$ zuerst oberhalb und dann immer unterhalb der x-Achse verläuft gibt es hier genau eine weitere Nullstelle, wenn die Flächenbilanz null ist. Für $x < 3$ gilt dies entsprechend, weshalb es insgesamt drei Nullstellen gibt.

Aufgabe 4

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{a}x^3 - x\right) = +\infty$ da $a > 0$, damit ist Abb. 2 richtig

b) $f_a'(x) = \frac{3}{a}x^2 - 1$; $f_a'(3) = \frac{3}{a} \cdot 3^2 - 1 = \frac{27}{a} - 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow a = 27$

$f_{27}''(x) = \frac{6}{27}x$; $f_{27}''(3) = \frac{18}{27} > 0 \Rightarrow$ Extrempunkt bei $x = 3$

ABI 2018
Analysis 2
B

Aufgabe 1

a) $f(x) = a \cdot x \cdot (x-5) \cdot (x-10)$

$P(1|2): \quad f(1) = 2$

$a \cdot 1 \cdot (1-5) \cdot (1-10) = 2 \Leftrightarrow a \cdot 36 = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{18}$

4 $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{18} x (x-5)(x-10) = \frac{1}{18} x (x^2 - 15x + 50) = \frac{1}{18}(x^3 - 15x^2 + 50x)$

b) $f'(x) = \frac{1}{18}(3x^2 - 30x + 50)$

$f''(x) = \frac{1}{18}(6x - 30)$

$f'''(x) = \frac{1}{18} \cdot 6 = \frac{1}{3} > 0$

$f''(x) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{18}}_{\neq 0}(6x - 30) = 0 \Leftrightarrow 6x = 30 \Rightarrow x_W = 5$

$f'''(5) = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $x_W = 5$

$f(5) = 0$ (gegebene Nst.) $\Rightarrow W(5|0)$ ist Wendepunkt

3,5

Tangente:

$m = f'(5) = \frac{1}{18}(3 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 50) = \frac{1}{18} \cdot (75 - 150 + 50) = -\frac{25}{18}$

$\Rightarrow 0 = -\frac{25}{18} \cdot 5 + t \Rightarrow t = \frac{125}{18}$

2,5 $y = -\frac{25}{18} \cdot x + \frac{125}{18}$

6

c) $g(x) = \frac{1}{18}(x^3 - 25x) = \frac{1}{18} \cdot x \cdot (x^2 - 25) = \frac{1}{18} \cdot x \cdot (x-5)(x+5)$

Nst von g bei $-5; 0; 5$

Nst von f bei $0; 5; 10 \Rightarrow G_g$ wurde um 5 LE in positive x-Richtung verschoben

2

$g(-x) = \frac{1}{18}((-x)^3 - 25(-x)) = \frac{1}{18}(-x^3 + 25x) = -\frac{1}{18}(x^3 - 25x) = -g(x)$

$\Rightarrow G_g$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Nach der Verschiebung entspricht der Ursprung dem Wendepunkt $W(5|0)$ von f, weshalb G_f punktsymmetrisch zum Wendepunkt sein muss

2

4

$F_1(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

d) $0 \le x \le 10$

$x_{01} = 1$ ✓✗, da $\int_1^1 f(t)\,dt = 0$ (unter = obere Grenze) ✓

$x_{02} = 9$ ✓✗: Da G_f punktsymmetrisch zu $W(5/0)$ ist, entspricht die Fläche oberhalb der x-Achse in $[1;5]$ genau der Fläche unterhalb der x-Achse in $[5;9]$ und die Flächenbilanz ist 0 ✓

3

e) Eine weitere positive Nullstelle gibt es dann, wenn die Fläche A_1 unterhalb der x-Achse in $[9;10]$ genauso ✓ groß ist wie die Fläche A_2 oberhalb der x-Achse in $[10; \approx 10{,}8]$ und die Flächenbilanz wieder 0 ist. ✓

2

f) F_1 ist als Integralfunktion eine spezielle Stammfunktion ✓ von f und da f vom Grad 3 ist, muss F_1 vom Grad 4 ✓ sein und eine ganzrationale Funktion 4. Grades kann höchstens 4 Nullstellen haben. ✓

3

g) $0 \le x \le 5$;

$h(x) = a \cdot \sin(bx)$ ✓ Periode: $p = 10 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ ✓

$\Rightarrow h(x) = a \cdot \sin(\frac{\pi}{5}x)$

$H(x) = -\frac{5}{\pi} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{5}x)$ ✓✓✗

$\int_0^5 h(x) \overset{!}{=} \frac{625}{72}$ ✓ $\Leftrightarrow \left[-\frac{5}{\pi} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{5}x)\right]_0^5 = \frac{625}{72}$

$-\frac{5}{\pi} a \underbrace{\cos \pi}_{=-1} - \left(-\frac{5}{\pi} a \underbrace{\cos 0}_{=1}\right) = \frac{625}{72}$

$\frac{5}{\pi} \cdot a + \frac{5}{\pi} \cdot a = \frac{625}{72}$

$\frac{10a}{\pi} = \frac{625}{72}$ ✓ $\quad | \cdot \frac{\pi}{10}$

$a = \frac{625}{72 \cdot 10}\pi = \frac{125}{144}\pi$

$\Longrightarrow h(x) = \frac{125}{144}\pi \cdot \sin(\frac{\pi}{5}x)$ ✓✗

Aufgabe 2

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 20 \qquad x \in [0;9]\,;\ K(x)$ in 1000€

a) α) ca $7\,m^3$ ✓

1

β) K ist streng monoton zunehmend, ✓ d.h. mit größer werdender Produktionsmenge steigen die Herstellungskosten an ✓ (insbesondere steigen die Kosten sehr stark für größer werdende Mengen ab $7m^3$).

2

3

b) $E(x) = 23x$ in 1000€ ; $x \in [0;9]$

$G(x) = E(x) - K(x) = 23x - (x^3 - 12x^2 + 50x + 20)$

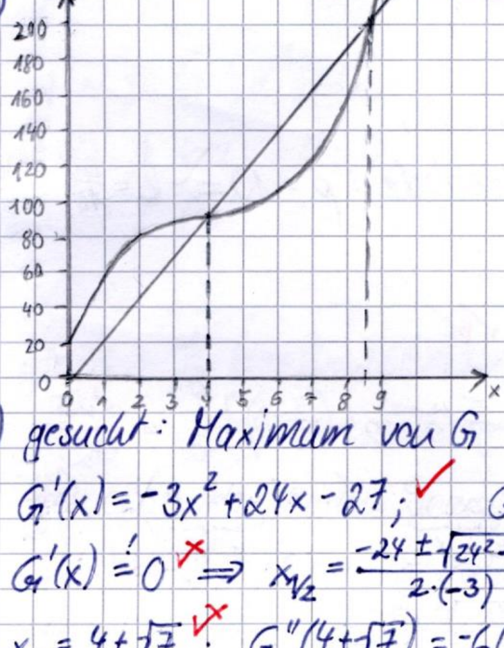
$G(x) = -x^3 + 12x^2 - 27x - 20$ ✓

$G(4) = -4^3 + 12 \cdot 4^2 - 27 \cdot 4 - 20 = -64 + 192 - 108 - 20 = 0$ ✓

$\Rightarrow$ kein Gewinn

2

c)



Gewinnbereich:

$4m^3 < x < 8{,}6m^3$ ✓ ✓

3

d) gesucht: Maximum von G

$G'(x) = -3x^2 + 24x - 27$; ✓ $G''(x) = -6x^2 + 24$ ✓✗

$G'(x) \overset{!}{=} 0$ ✗ $\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4(-3)(-27)}}{2\cdot(-3)}$ ✓ $= \frac{-24 \pm 6\sqrt{7}}{-6} = 4 \pm \sqrt{7}$

$x_1 = 4 + \sqrt{7}$ ✓✗; $G''(4+\sqrt{7}) = -6(4+\sqrt{7}) + 24 = -6\sqrt{7} < 0 \Rightarrow$ Maximum ✗

$x_2 = 4 - \sqrt{7}$ ✓✗; $G''(4-\sqrt{7}) = -6(4-\sqrt{7}) + 24 = 6\sqrt{7} > 0 \Rightarrow$ Minimum

$\Rightarrow$ größter Gewinn bei $4 + \sqrt{7} \approx 6{,}65m^3$ ✓✗

5