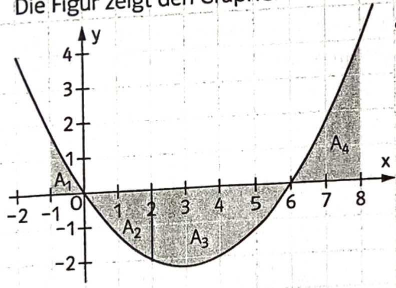
Das Integral als Flächenbilanz bzw. Gesamtänderung

1. Die Figur zeigt den Graphen der Funktion f: $x \mapsto 0{,}25x^2 - 1{,}5x$ sowie vier Flächen mit den Inhalten A_1, A_2, A_3 und A_4.



a) Schreiben Sie folgende Integrale mithilfe dieser Flächeninhalte.

$\int_{-1}^{2} (0{,}25x^2 - 1{,}5x)\,dx =$

$\int_{0}^{6} (0{,}25x^2 - 1{,}5x)\,dx =$

$\int_{0}^{8} (0{,}25x^2 - 1{,}5x)\,dx =$

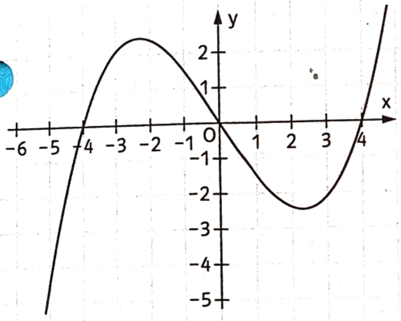
b) Schreiben Sie folgende Flächeninhalte mithilfe von Integralen.

$-A_3 + A_4 =$

$A_1 - A_2 - A_3 =$

$A_1 + A_4 - (A_2 + A_3) =$

2. Die Figur zeigt den Graphen der Funktion f: $x \mapsto 0{,}1x^3 - 1{,}6x$.
Es wurden folgende Werte auf Zehntel genau ermittelt:
$\int_{-5}^{-4} f(x)\,dx \approx -2{,}0$; $\int_{-4}^{-3} f(x)\,dx \approx 1{,}2$; $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx \approx 5{,}2$



a) Färben Sie die zu den Integralen gehörigen Flächen und bezeichnen Sie diese von links nach rechts mit A_1, A_2 und A_3.
Bestimmen Sie mithilfe von A_1, A_2 und A_3 folgende Integrale und begründen Sie kurz Ihre Überlegungen.

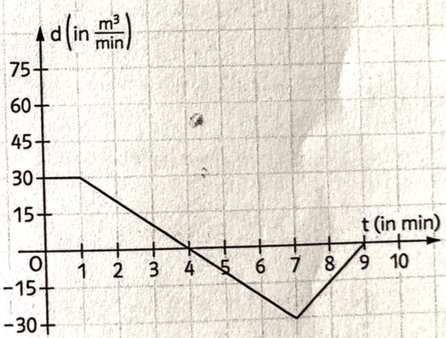
b) $\int_{-5}^{-3} f(x)\,dx =$

c) $\int_{3}^{5} f(x)\,dx =$

d) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx =$

e) $\int_{4}^{4} f(x)\,dx =$

3. Ein Fluss besitzt ein Regenrückhaltebecken. Durch ein mit einem Schieber gesteuertes Rohr kann das Flusswasser zu- bzw. abfließen. Die Figur zeigt den Verlauf der Durchflussrate d in m^3 pro Minute. Das Becken ist zu Beginn leer.



a) Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen Wasser zu- bzw. abläuft:

b) Wann hat das Becken am meisten, wann am wenigsten Wasser?

c) Bestimmen Sie mithilfe passender Flächeninhalte für jede der in der Tabelle angegebenen Zeiten das Volumen des Wassers im Behälter.

t (in min)	0	1	2,5	4	5,5	7	9
V (in m^3)	0						
Integral	$\int_0^0 d(t)\,dt$						

d) Welche Bedeutung haben die Integrale $\int_0^1 d(t)\,dt$, $\int_0^4 d(t)\,dt$ und $\int_0^9 d(t)\,dt$ für die vorgegebene Situation?

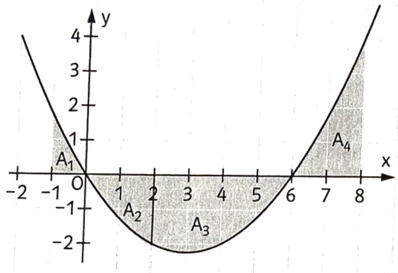
e) Tragen Sie in die Tabelle die passenden Integrale ein.

f) Betrachtet man die obere Grenze der Integrale in der Tabelle als variabel, so erhält man die Integralfunktion $I_0: x \mapsto \int_0^x d(t)\,dt$. Skizzieren Sie deren Graphen ins obige Koordinatensystem.

g) Beschreiben Sie anhand beider Graphen die Situation am Rückhaltebecken möglichst genau.

Das Integral als Flächenbilanz bzw. Gesamtänderung

1. Die Figur zeigt den Graphen der Funktion f: $x \mapsto 0{,}25x^2 - 1{,}5x$ sowie vier Flächen mit den Inhalten A_1, A_2, A_3 und A_4.



a) Schreiben Sie folgende Integrale mithilfe dieser Flächeninhalte.

$\int_{-1}^{2} (0{,}25x^2 - 1{,}5x)\,dx = A_1 - A_2$

$\int_{0}^{6} (0{,}25x^2 - 1{,}5x)\,dx = -A_2 - A_3$

$\int_{0}^{8} (0{,}25x^2 - 1{,}5x)\,dx = -A_2 - A_3 + A_4$

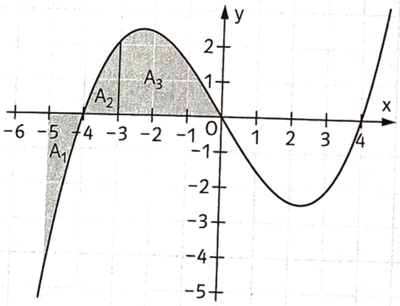
b) Schreiben Sie folgende Flächeninhalte mithilfe von Integralen.

$-A_3 + A_4 = \int_{2}^{8} (0{,}25x^2 - 1{,}5x)$ c

$A_1 - A_2 - A_3 = \int_{-1}^{6} (0{,}25x^2 - 1{,}5x)$ c

$A_1 + A_4 - (A_2 + A_3) = \int_{-1}^{8} (0{,}25x^2 - 1{,}5x)$ d

2. Die Figur zeigt den Graphen der Funktion f: $x \mapsto 0{,}1x^3 - 1{,}6x$.
Es wurden folgende Werte auf Zehntel genau ermittelt:
$\int_{-5}^{-4} f(x)\,dx \approx -2{,}0$; $\int_{-4}^{-3} f(x)\,dx \approx 1{,}2$; $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx \approx 5{,}2$



a) Färben Sie die zu den Integralen gehörigen Flächen und bezeichnen Sie diese von links nach rechts mit A_1, A_2 und Bestimmen Sie mithilfe von A_1, A_2 und A_3 folgende Integrale ι begründen Sie kurz Ihre Überlegungen.

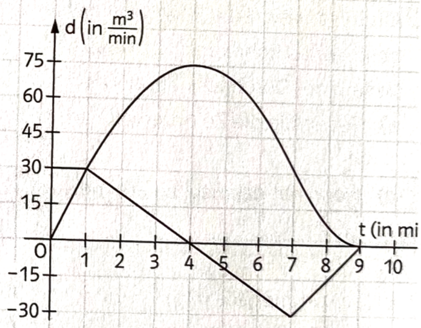
b) $\int_{-5}^{-3} f(x)\,dx = -A_1 + A_3 \approx -2{,}0 + 1{,}2 = -0{,}8$;
A_1 liegt unterhalb der x-Achse

c) $\int_{3}^{5} f(x)\,dx = A_1 - A_2 \approx -1{,}2 + 2{,}0 = 0{,}8$; punktsymmetrisch zu b)
gleiche Werte mit verschiedenen Vorzeichen

d) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = A_3 - A_3 \approx 5{,}2 - 5{,}2 = 0$; punktsymmetrisch bzgl. Ursprung; gleicher Wert, Vorzeichenwechsel

e) $\int_{4}^{4} f(x)\,dx = 0$; keine Fläche zwischen 4 und 4

3. Ein Fluss besitzt ein Regenrückhaltebecken. Durch ein mit einem Schieber gesteuertes Rohr kann das Flusswasser zu- bzw. abfließen. Die Figur zeigt den Verlauf der Durchflussrate d in m^3 pro Minute. Das Becken ist zu Beginn leer.



a) Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen Wasser zu- bzw. abläuft:
Für [0 min; 4 min) fließt Wasser zu, für (4 min; 9 min) fließt Wasser ab.

b) Wann hat das Becken am meisten, wann am wenigsten Wasser?
Nach 4 min hat das Becken am meisten Wasser, zu Beginn und nach 9 min am wenigsten.

c) Bestimmen Sie mithilfe passender Flächeninhalte für jede der in der Tabelle angegebenen Zeiten das Volumen des Wassers im Behälter.

t (in min)	0	1	2,5	4	5,5	7	9
V (in m^3)	0	30	63,75	75	63,75	30	0
Integral	$\int_0^0 d(t)\,dt$	$\int_0^1 d(t)\,dt$	$\int_0^{2,5} d(t)\,dt$	$\int_0^4 d(t)\,dt$	$\int_0^{5,5} d(t)\,dt$	$\int_0^7 d(t)\,dt$	$\int_0^9 d(t)\,dt$

d) Welche Bedeutung haben die Integrale $\int_0^1 d(t)\,dt$, $\int_0^4 d(t)\,dt$ und $\int_0^9 d(t)\,dt$ für die vorgegebene Situation?
Sie geben an, wie viel m^3 Wasser bis zum Ende der ersten, vierten und neunten Minute im Becken enthalten sind, also die Gesamtänderung bis zu diesen Zeitpunkten.

e) Tragen Sie in die Tabelle die passenden Integrale ein.

f) Betrachtet man die obere Grenze der Integrale in der Tabelle als variabel, so erhält man die Integralfunktion $I_0: x \mapsto \int_0^x d(t)\,dt$. Skizzieren Sie deren Graphen ins obige Koordinatensystem.

g) Beschreiben Sie anhand beider Graphen die Situation am Rückhaltebecken möglichst genau.
Das anfangs leere Becken füllt sich im Zeitraum [0 min; 1 min] mit konstant $30\,\frac{m^3}{min}$. Im Zeitraum [1 min; 4 min] geht der Zufluss auf $0\,\frac{m^3}{min}$ zurück. Zum Zeitpunkt t = 4 min ist das Wasservolumen im Rückhaltebecken maximal. Ab dann fließt zı nehmend mehr Wasser ab, bis für t = 7 min mit $30\,\frac{m^3}{min}$ die Abflussrate maximal ist. Der Abfluss geht bis t = 9 min bis auf $0\,\frac{m^3}{min}$ zurück. Dann ist auch das Becken wieder leer.