Übungsblatt zum Themenbereich: Flächen zwischen zwei Graphen

Lösungen:

Aufgabe 3: (schwieriger **)

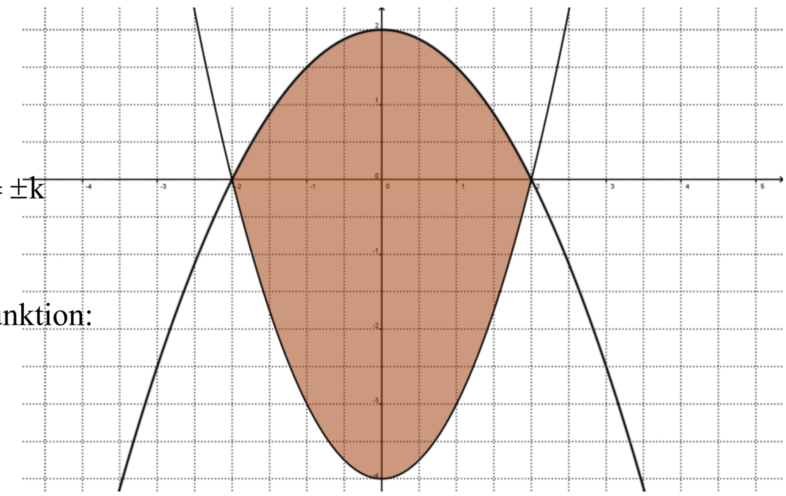
Bestimmen Sie k > 0 so, dass die Maßzahl des Inhalts des Flächenstücks, das von den Parabeln mit den Gleichungen $y = x^2 - k^2$ und $y = -\frac{1}{k}x^2 + k$ begrenzt wird, gleich 16 ist. [Lösung: k=2]

Durch das Gleichsetzen der Funktionsterme erhält man zunächst die Schnittpunkte der beiden Parabeln. Diesem Schritt entspricht das Berechnen der Differenzfunktion und deren Nullstellen:

$$-\frac{1}{k}x^2 + k = x^2 - k^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{k}x^2 - x^2 + k + k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(-\frac{1}{k} - 1\right) \cdot x^2 + \left(k + k^2\right)}_{\text{Term der Differenzfunktion}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{k + k^2}{-\frac{1}{k} - 1} = \frac{k \cdot (1 + k)}{\frac{(1 + k)}{k}} = k^2 \Rightarrow x = \pm k$$



Nun integrieren wir über die Differenzfunktion:

$$\int_{-k}^{k} \left(\left(-\frac{1}{k} - 1\right) \cdot x^2 + \left(k + k^2\right) \right) dx = 16$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{k} - 1\right) \cdot x^3 + \left(k + k^2\right) \cdot x \right]_{-k}^{k} = 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{k} - 1\right) \cdot k^3 + \left(k + k^2\right) \cdot k - \left(\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{k} - 1\right) \cdot (-k)^3 + \left(k + k^2\right) \cdot (-k) \right) = 16$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}k^2 - \frac{1}{3}k^3 + k^2 + k^3 - \left(\frac{1}{3}k^2 + \frac{1}{3}k^3 - k^2 - k^3 \right) = 16$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}k^2 + \frac{4}{3}k^3 = 16 \Rightarrow k^2 + k^3 = 12$$

$$\Rightarrow k^3 + k^2 - 12 = 0 \Rightarrow \mathit{Polynomdivision}: \left(k^3 + k^2 - 12\right) : \left(k - 2\right) = k^2 + 3k + 6$$

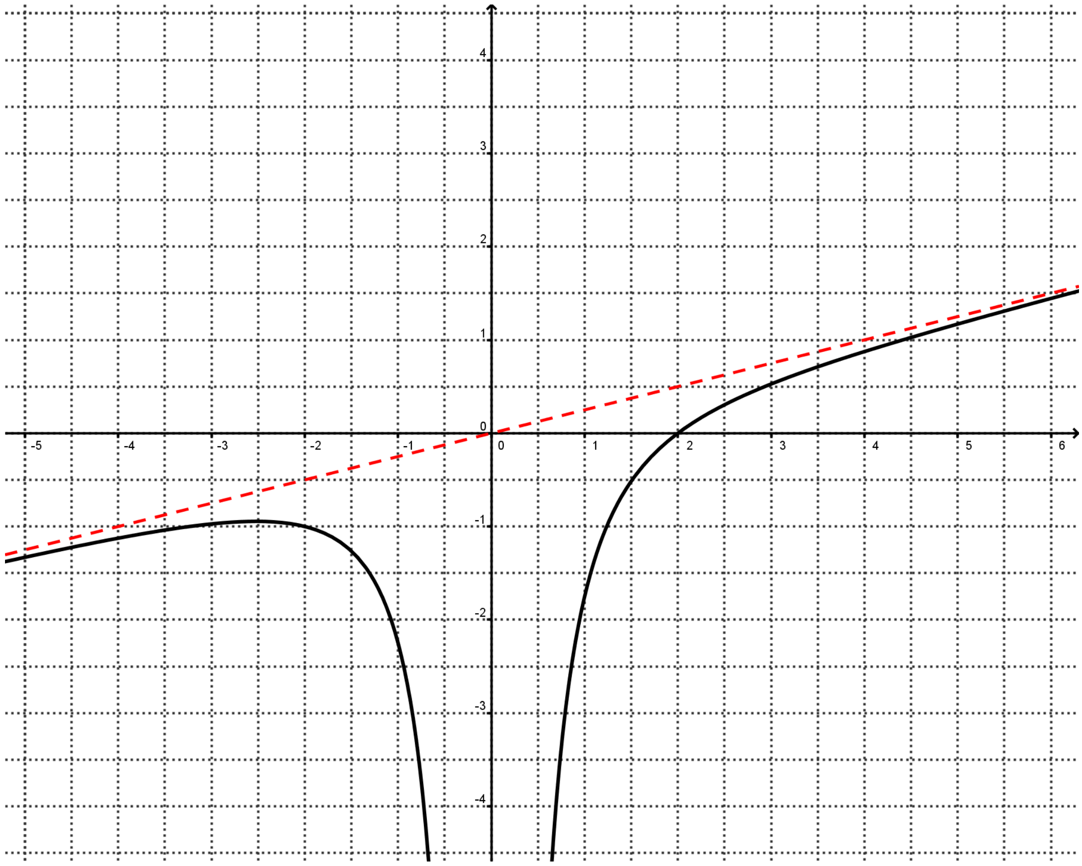
$$\Rightarrow k^3 + k^2 - 12 = \underbrace{\left(k^2 + 3k + 6\right)}_{k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 24}}{2} \Rightarrow \mathit{keine\ Nullstellen}} \cdot \left(k - 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathit{Die\ einzige\ Lösung\ ist\ } k = 2$$

Aufgabe 4: (schwieriger *)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x - \frac{2}{x^2}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen G_f der Funktion f und die Asymptote zu G_f für $x \to \pm\infty$.



b) Berechnen Sie dann den Flächeninhalt A(k) zwischen G_f und der Asymptote im Intervall $[1;k]$, $k \in]1;+\infty[$. [Lösung: $A(k) = 2 - \frac{2}{k}$]

Die Asymptote ist $a(x) = \frac{1}{4}x$, weil $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = 0$. Daher folgt für die Fläche zwischen G_f und der Asymptote: $\int_1^k \left(\frac{1}{4}x - \left(\frac{1}{4}x - \frac{2}{x^2} \right) \right) dx = \int_1^k \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x} \right]_1^k = -\frac{2}{k} + 2$.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert von A(k) für $k \to +\infty$ und interpretieren Sie diesen geometrisch.[Lösung: $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k) = 2$]

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k \left(\frac{1}{4}x - \left(\frac{1}{4}x - \frac{2}{x^2} \right) \right) dx = \lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{2}{x^2}\,dx = \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{2}{x} \right]_1^k = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{2}{k} + 2 \right) = 2$$

Da der Grenzwert einen endlichen Wert hat, handelt es sich hier um ein uneigentliches Integral. Geometrisch bedeutet dies, dass die Fläche zwischen der Asymptote und dem Graphen endlich groß ist und nicht „ über alle Maßen wächst“, obwohl sie nach rechts unbegrenzt ist.