1 7 Flächenberechnungen mit dem Integral

S.36/4

Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse einschließt:

a) $f: x \mapsto x\left(4-x^2\right)$

Lösungsweg: Zuerst müssen die Nullstellen der Funktion bestimmt und anschließend eine Skizze des Funktionsgraphen angefertigt werden, damit überhaupt erkannt werden kann, in welchem Bereich integriert werden muss:

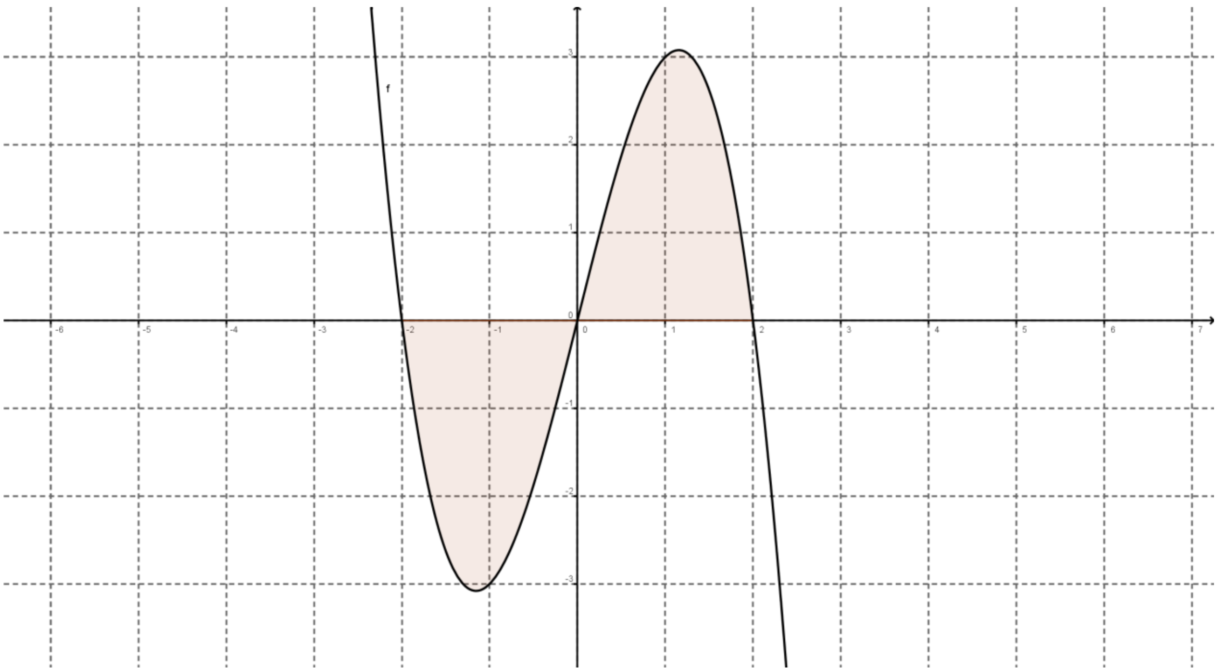
$f: x \mapsto x\left(4-x^2\right) = x(2-x)(2+x)$, also sind Nullstellen: $x_{N_1} = 0; x_{N_2} = -2;\ x_{N_3} = 2$.

Für die Bestimmung der gesuchten Flächen ergibt sich damit:

$$\left|\int_{-2}^{0}\left(x\left(4-x^2\right)\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{2}\left(x\left(4-x^2\right)\right)dx\right| = \left|\int_{-2}^{0}\left(4x-x^3\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{2}\left(4x-x^3\right)dx\right| = \left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left|0-\left(2\cdot(-2)^2-\frac{1}{4}\cdot(-2)^4\right)\right| + \left|\left(2\cdot 2^2-\frac{1}{4}\cdot 2^4\right)-0\right| = 4+4 = 8\ FE.$$

Der Graph veranschaulicht die Berechnungen:



b) $f: x \mapsto (x-2)^2 - 1$

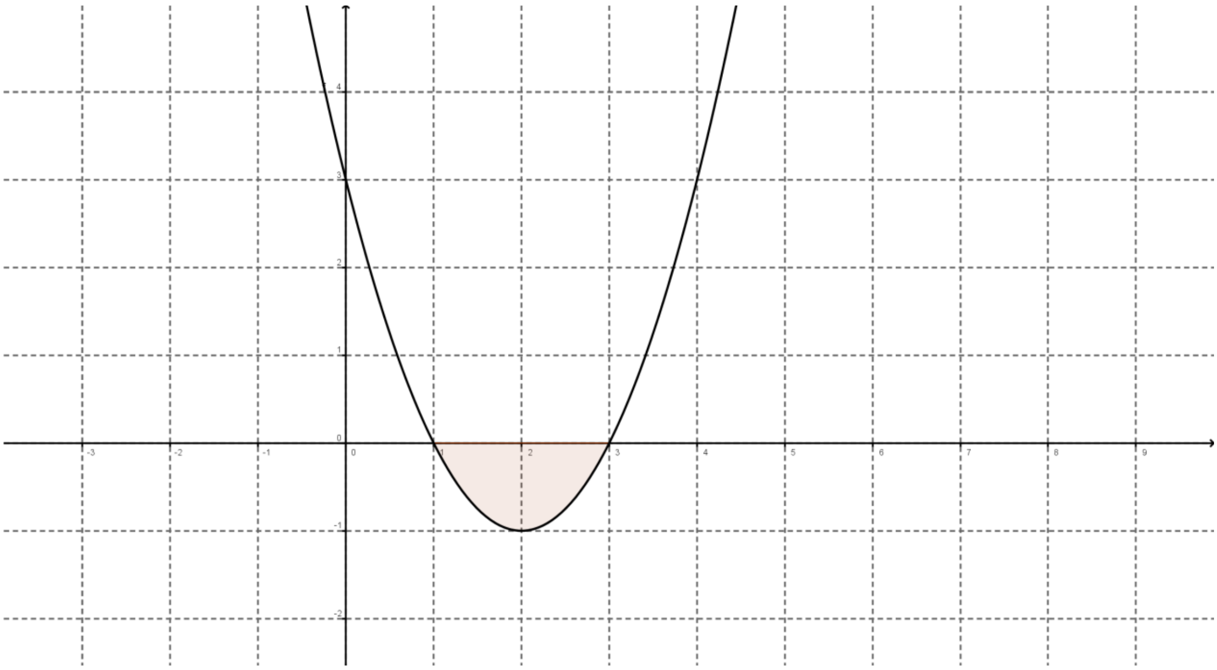
Auch hier gilt es wieder die Nullstellen der Funktion f zu bestimmen, was mit Hilfe der Mitternachtsformel oder geschickten Umformungen gelingt:

$$f: x \mapsto (x-2)^2 - 1 = \left(x^2 - 4x + 4\right) - 1 = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Damit sind wieder die Integrationsgrenzen festgelegt:

$$\left|\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right)\right| = \left|0 - \left(1\frac{1}{3}\right)\right| = 1\frac{1}{3} FE$$

Der Funktionsgraph veranschaulicht wie folgt:



Komplexere Betrachtungen sind dann vonnöten, wenn es nicht nur um die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse, sondern um die Fläche zwischen Funktionsgraphen, einer Geraden und der x-Achse geht. Auch hierbei ist eine Veranschaulichung hilfreich, damit klar wird, welche Flächen überhaupt betrachtet werden:

S.36/7

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen G_g, der Tangente an den Graphen in P und der x-Achse begrenzt wird.

a) $g: x \mapsto 0{,}5x^2; P(3|4{,}5)$.

Zunächst bestimmen wir die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt P:

Entweder mit Hilfe der Formel: $t: y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$, wobei hier der Punkt P verwendet wird: $t: y = 3\cdot(x-3) + 4{,}5 = 3x - 4{,}5$.

Oder mit Hilfe der allg. Geradengleichung: $y = m \cdot x + t$ mit $m = f'(x_0) \Rightarrow m = x_0 \Rightarrow m = 3$ und damit: $4{,}5 = 3 \cdot 3 + t \Leftrightarrow t = -4{,}5$. Das bedeutet für die Tangentengleichung: $t: y = 3x - 4{,}5$.

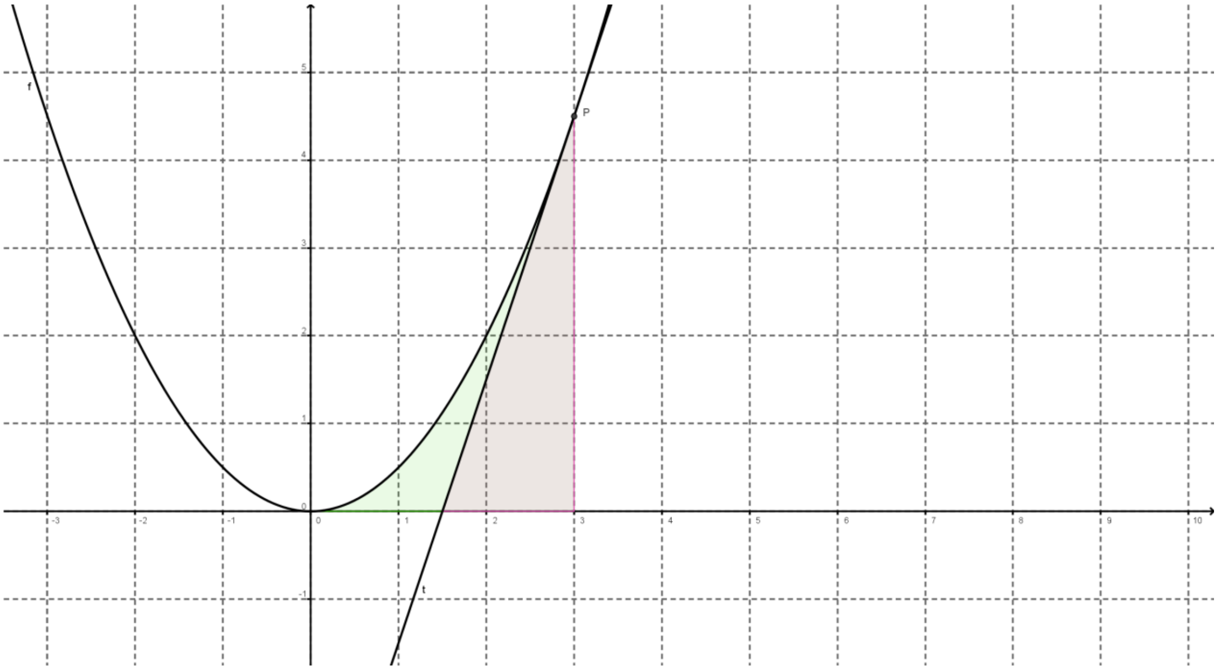
Die Nullstellen beider Funktionen bestimmen dann die untere Integrationsgrenze der jeweiligen Integrale:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und für die Tangente: $t(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4{,}5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Da sich die beiden Graphen im Punkt P berühren folgt nun für die Integrale:

$$\left|\int_0^3 0{,}5x^2 dx\right| - \left|\int_{1,5}^3 (3x - 4{,}5)\, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^3\right| - \left|\left[\frac{3}{2}x^2 - 4{,}5x\right]_{1,5}^3\right| = \frac{27}{6} - \left|\frac{27}{2} - \frac{27}{2} - \left(\frac{27}{8} - \frac{27}{4}\right)\right| = \frac{9}{2} - \frac{27}{8} = 1\frac{1}{8} FE$$

Grafisch veranschaulicht:



b) $g : x \mapsto (x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16; P(0|16)$

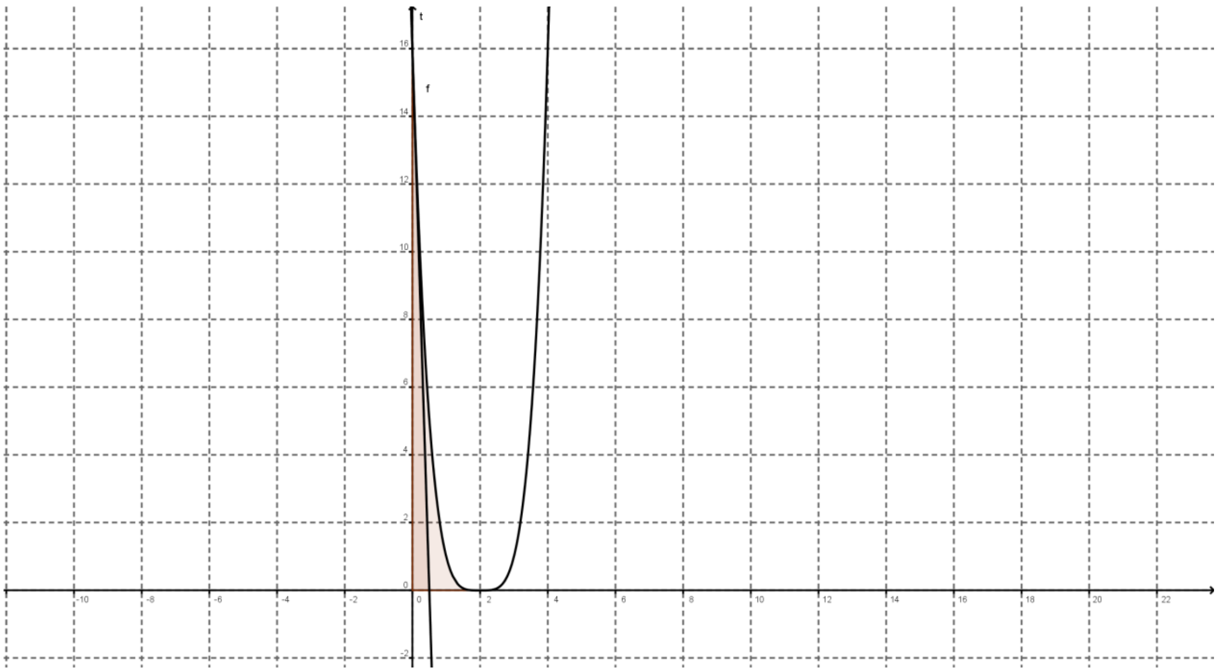
Die Tangente berechnet sich wieder über die Ableitungsfunktion

$f'(x) = 4 \cdot (x-2)^3 = 4x^3 - 24x^2 + 48x - 32$ und es ergibt sich dann: $t : y = -32x + 16$.

Die Nullstellen sind für f: $x_{N_1} = 2$ und für t: $x_{N_2} = \frac{1}{2}$.

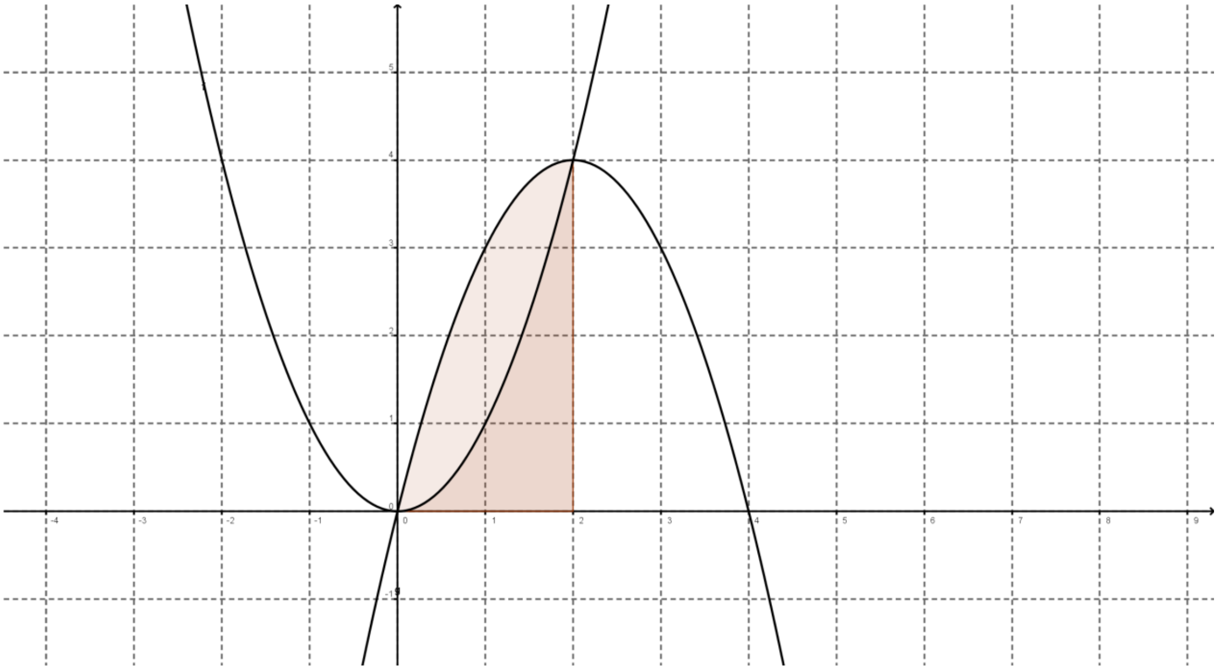
Die Integrale und der gesuchte Flächeninhalt ergeben sich damit zu:

$$\left|\int_0^2 (x-2)^4 \, dx\right| - \left|\int_0^{0,5} (-32x+16)\, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{5}\cdot(x-2)^5\right]_0^2\right| - \left|\left[-16x^2+16x\right]_0^{0,5}\right| = \frac{32}{5} - 4 = 2\frac{2}{5} = 2,4.$$



S.36/8

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird. Fertigen Sie zum Überblick eine Skizze an.



Durch die Skizze wird anschaulich klar, dass man hier zunächst die Schnittpunkte der beiden Graphen bestimmen muss und dann die Differenz zwischen der „oberen“ und der „unteren“ Funktion bilden muss. Insgesamt läuft das dann auf die Integration der sog. Differenzfunktion hinaus:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = -x^2 + 4x \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow -2x \cdot (x-2) = 0$. Die beiden Schnittstellen sind damit: $x_{S_1} = 0$ und $x_{S_2} = 2$.

Für die Integral bedeutet dies:

$$\left|\int_0^2 g(x) - \int_0^2 f(x)\right| = \left|\int_0^2 \left(-x^2 + 4x\right)dx - \int_0^2 x^2 dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 - \left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^2\right| = \left|-\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}FE$$

Eine Integration über die Differenzfunktion $d(x) = g(x) - f(x)$ liefert dasselbe Ergebnis:

$$\int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = 2\frac{2}{3}FE.$$