3.10 Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

S. 90/3:

Aus einer Urne mit 75 weißen und 25 roten Kugeln wird 25-mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln an, die Zufallsgröße Y die Anzahl der roten Kugeln.

(a) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y.

X ist offensichtlich binomialverteilt mit B(25; 0,75), d.h. $E(X) = 25 \cdot 0,75 = 18,75$ und Y ist binomialverteilt mit B(25; 0,25), d.h. $E(Y) = 25 \cdot 0,25 = 6,25$. Damit folgt für die Varianz: $Var(X) = 25 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = Var(Y) = 25 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 4,6875$. Die Standardabweichung wäre (ohne Einheit) jeweils $\sigma = 2,1651$.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 10 rote Kugeln gezogen?

$P(Y \geq 10) = 1 - P(Y \leq 9) = 1 - 0,92867 = 7,133\%$ (mit Tafelwerk: S.16)

S. 90/4:

Bei der Fertigung von Spielzeugautos weist durchschnittlich jedes 15.Auto Mängel auf.

(a) Mit wie vielen mängelbehafteten Autos muss man auf lange Sicht im Durchschnitt an einem Produktionstag rechnen, wenn pro Arbeitstag 630 Stück produziert werden?

Die Zufallsvariable X zählt die mängelbehafteten Spielzeugautos pro Produktionstag, damit ist sie binomialverteilt nach $B\left(630; \frac{1}{15}\right)$. Es gilt für den Erwartungswert:

$E(X) = 630 \cdot \frac{1}{15} = 42$. Es muss also mit 42 mängelbehafteten Autos pro Arbeitstag gerechnet werden.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter 30 zufällig herausgegriffenen Exemplaren höchstens eines mit Mängeln behaftet?

$$P(X \leq 1) = \binom{30}{0}\left(\frac{1}{15}\right)^0 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{30} + \binom{30}{1}\left(\frac{1}{15}\right)^1 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{29} = 12,621\% + 27,046\% = 39,667\%.$$

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 30 zufällig herausgegriffenen Spielzeugautos genau 2 Autos Mängel aufweisen?

Zählt wieder X als Zufallsvariable die Anzahl der mängelbehafteten Spielzeugautos, so ist sie binomialverteilt mit $B\left(30; \frac{1}{15}\right)$. Gesucht ist also

$$P(X = 2) = \binom{30}{2} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{28} = 28,012\%.$$

S.91/6:

In einer Fabrik werden die hergestellten Teile von einer Kontrolleurin überprüft, die jedes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% richtig beurteilt. X sei die Anzahl der falschen Entscheidungen der Kontrolleurin bei 100 Kontrollen.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ und interpretieren Sie die ermittelte Zahl.

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt nach B(100; 0,05). Das bedeutet für den Erwartungswert: $E(X) = \mu = 100 \cdot 0,05 = 5$. Sie trifft also erwartungsgemäß durchschnittlich 5 falsche Entscheidungen bei 100 Entscheidungen.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der falsch beurteilten Teile im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$.

Zunächst muss die Standardabweichung mit Hilfe der Varianz ermittelt werden: $\sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{100 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = \sqrt{4,75} = 2,1794$. Damit ergibt sich für das gesuchte Intervall: $[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = [5 - 2,1794; 5 + 2,1794] \approx [3; 7]$. So gilt es die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass die Kontrolleurin mindestens 3, aber höchstens 7 falsche Entscheidungen trifft: $P(3 \le X \le 7) = P(X \le 7) - P(X \le 2) = 0,87204 - 0,11826 = 75,378\%$.

S. 95/7:

Die 200 Plätze für eine Theatervorstellung sind ausverkauft. Aus Erfahrung weiß man, dass 15% der Theaterbesucher in der Pause einen Orangensaft trinken möchten. Wie viele Gläser Orangensaft müssen bereit gestellt werden, wenn man mit einer Sicherheit von (mindestens) 90% jeden Wunsch eines Besuchers nach einem Glas Orangensaft erfüllen möchte?

Wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der Personen zählt, die bei einer Theatervorstellung ein Glas Orangensaft trinken wollen, so ist X binomialverteilt nach B(200; 0,15).
Wir suchen also $P(X \le k) \ge 0,90$. Dies findet sich mit Hilfe des Tafelwerks bei $P(X \le 37) = 0,92802 \ge 0,90$, d.h., es sollten mindestens 37 Gläser Orangensaft bereit gestellt werden.