3.7 Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette

Definition:

Ein Zufallsexperiment mit nur zwei Ergebnissen heißt Bernoulli-Experiment. Die Wahrscheinlichkeit für Treffer wird mit p, die für Niete mit q bezeichnet, wobei $q = 1 - p$ ist.

Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments besteht, heißt Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter p.

Rund 8% der Männer, aber nur 0,4% der Frauen in Deutschland haben eine angeborene Farbenfehlsichtigkeit.

(a) Bei einem Sehtest wird von acht zufällig ausgewählten Frauen die Farbwahrnehmung untersucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nur bei der letzten Frau diese Wahrnehmung gestört?

Die Darstellung dieses Sehtest als Bernoulli-Kette der Länge acht liegt auf der Hand: Für jede der acht Frauen kann nur das Ergebnis „Farbwahrnehmung in Ordnung“ (=O) oder das Ergebnis „Farbwahrnehmung gestört“ (=G) auftreten. Da die acht Frauen zufällig ausgewählt sind, kann man davon ausgehen, dass die Erhebungen unabhängig voneinander erfolgen.
Wir suchen also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „OOOOOOOG“. Deuten wir „O“ als „Treffer“ mit der Wahrscheinlichkeit 99,6% und „G“ als „Niete“ mit der Wahrscheinlichkeit 1-99,6% = 0,4%, so ergibt sich folgende Berechnung:

$$P(\text{OOOOOOOG}) = 0{,}996^7 \cdot 0{,}004^1 = 0{,}39\%.$$

(b) Eine Augenärztin untersucht nacheinander die Farbwahrnehmung von zehn zufällig ausgewählten Männern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst bei der sechsten Untersuchung zum ersten Mal eine Farbsichtigkeit festgestellt wird?

Es gilt hier wieder dasselbe wie unter (a), nur dass ausschließlich die ersten sechs Stellen der zehnstelligen Bernoulli-Kette festgelegt sind. Die letzten vier Stellen können mit „O“ oder „G“ besetzt sein, was diesen jeweils die Wahrscheinlichkeit von 1 zuordnen würde.

$$P(\text{OOOOOGXXXX}) = 0{,}92^5 \cdot 0{,}08$$

Bei einem Glücksrad, das auf seinen gleich großen Feldern die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 trägt, erscheint jedes der 5 Felder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 20%. Das Glücksrad wird fünfmal gedreht und jeweils die ermittelte Ziffer festgestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind

(a) die erste und die letzte Ziffer gerade, die übrigen ungerade

Bezeichnen wir die Ereignisse „Es erscheint eine gerade Ziffer“ mit G und „Es erscheint eine ungerade Ziffer“ mit U, so ergibt sich eine Bernoulli-Kette der Länge 5:

$$P(\text{GUUUG}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 3{,}456\% .$$

(b) nur die ersten zwei Ziffern gerade:

d.h. die letzten drei Ziffern sind keinesfalls gerade, also ungerade

$$P(\text{GGUUU}) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 3{,}456\% .$$

(c) Nur die mittlere Ziffer größer als 3:

d.h., die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern sind kleiner gleich 3, nur die mittlere Ziffer ist 4 oder 5:

$$P\left(\{1;2;3\}\{1;2;3\}\{4;5\}\{1;2;3\}\{1;2;3\}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{2}{5} = 5{,}184\%$$

(d) Alle Ziffern verschieden:

Da es sich beim Glücksrad um ein Ziehen mit Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge handelt, gibt es 5! verschiedene Ziffernkombinationen mit unterschiedlichen Ziffern, insgesamt gibt es 5^5 verschiedene fünfstellige „Zahlen“, die mit dem Glücksrad gedreht werden können: $P(\text{verschiedene Ziffern}) = \frac{5!}{5^5} = 3{,}84\%$.

Binomialverteilung

Satz (Formel von Bernoulli):

Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer an.

Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer mit $k \in \{0;1;...;n\}$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X heißt **binomialverteilt** nach $B(n;p)$ oder $B_{n;p}$, wenn gilt:

- X kann die Werte 0; 1; 2; …; n annehmen.
- $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit $0 \le p \le 1$.

Von 100 Personen einer Bevölkerung sind im Durchschnitt 15 Linkshänder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 25 zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerung

(a) genau eine Person Linkshänder ist,

Die Wahrscheinlichkeit, Linkshänder zu sein, beträgt 15%, nun werden 25 Personen betrachtet, von denen genau eine Linkshänder sein soll. Versteht man dies zunächst als Bernoulli-Kette, so kann der Linkshänder an 25 verschiedenen Positionen „gezogen“ werden, für die anderen 24 Rechtshänder gilt jeweils die Wahrscheinlichkeit 85%. Die Zufallsgröße X beschreibt hierbei die Anzahl der Linkshänder:

$$P(\text{genau}\,1\,\text{Linkshänder})=P(X=1)=\binom{25}{1}\cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24}=7{,}587\%.$$

(b) mindestens eine Person Linkshänder ist:

$$P(\text{mind.}1\,\text{Linkshänder})=P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\binom{25}{0}\cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^{25}=98{,}28\%.$$

(c) höchstens zwei Personen Linkshänder sind:

$$P(X\le 2)=\binom{25}{0}\cdot 0{,}15^0\cdot 0{,}85^{25}+\binom{25}{1}\cdot 0{,}15^1\cdot 0{,}85^{24}+\binom{25}{2}\cdot 0{,}15^2\cdot 0{,}85^{23}=25{,}374\%$$

(d) mehr als drei Personen Linkshänder sind:

$$P(X>3)=P(X\ge 4)=1-P(X\le 3)=1-47{,}112\%=52{,}888\%.$$