

Aufgaben zur Binomialverteilung

Eine Maschine stellt Schrauben mit einem Ausschussanteil von 3% her. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- (a) unter 4 Schrauben kein Ausschussstück ist,
- (b) unter 10 Schrauben genau 4 Ausschussstücke sind,
- (c) unter 8 Schrauben weniger als 4 Ausschussstücke sind,
- (d) unter 15 Schrauben mehr als 1, aber weniger als 4 Ausschussstücke sind?

S.81/5

Die Aufgabe stellt verschieden lange Bernoulli-Ketten in den Mittelpunkt. Die beiden möglichen Ergebnisse sind „defekt“ (=Treffer mit Wahrscheinlichkeit 3%) bzw. „in Ordnung“ (=Niete mit Wahrscheinlichkeit 97%). Die Zufallsvariable X bezeichnet wieder die Anzahl der defekten Schrauben (=Ausschussstücke).

$$(a) P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^4 = 88,53\% = B(4; 0,03; 0)$$

$$(b) P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0,03^4 \cdot 0,97^6 = 0,014\% = B(10; 0,03; 4)$$

$$P(X < 4) = P(X \leq 3) =$$

$$(c) = \binom{8}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^8 + \binom{8}{1} \cdot 0,03^1 \cdot 0,97^7 + \binom{8}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^6 + \binom{8}{3} \cdot 0,03^3 \cdot 0,97^5 = 99,995\%$$

$$(d) P(1 < X < 4) = P(2 \leq X \leq 3) = \binom{15}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^{13} + \binom{15}{3} \cdot 0,03^3 \cdot 0,97^{12} = 7,212\%$$

Auf einer Hühnerfarm werden Eier in Schachteln zu 10 Stück verpackt. Erfahrungsgemäß ist eines von zehn Eiern angebrochen.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Schachtel nur ganze Eier?
- (b) 12 Schachteln werden an 12 Kunden verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten genau 2 Kunden je eine Schachtel mit nur guten Eiern?

S.81/7

- (a) Die Eierschachtel lässt sich als Bernoulli-Kette der Länge 10 interpretieren, bei der die beiden Ergebnisse „angebrochen“ (=Treffer mit Wahrscheinlichkeit 10%) und „nicht angebrochen“ (=Niete mit Wahrscheinlichkeit 90%) für jedes Ei in Frage kommen können. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der angebrochenen Eier an und ist binomialverteilt

nach $B(10; 0,1)$: $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{10} = 34,868\%$.

(b) Bei dieser Teilaufgabe handelt es sich um eine Bernoulli-Kette der Länge 12, bei der an jeder Stelle angegeben wird, ob die gekaufte Schachtel kein angebrochenes Ei enthält oder wenigstens ein angebrochenes Ei. Die Zufallsvariable Y gibt nun an, wie viele Schachteln ohne angebrochene Eier sind und ist binomialverteilt nach $B(12;0,34868)$.

$$P(Y = 2) = \binom{12}{2} \cdot 0,34868^2 \cdot 0,65132^{10} = 11,024\%$$

Eine Firma, die einen Artikel in Paketen zu je 15 Stück an den Einzelhandel vertreibt, vereinbart, dass Pakete mit mehr als 2 schadhaften Stücken nicht berechnet werden.

Wie viel Prozent der ausgelieferten Pakete muss die Firma als unberechnet kalkulieren, wenn ihr bekannt ist, dass durchschnittlich 2% der Artikel schadhaft sind?

S.82/13

Die einzelnen Pakete lassen sich als Bernoulli-Kette der Länge 15 verstehen, bei der die Trefferwahrscheinlichkeit 2% ist (d.h. die Wahrscheinlichkeit für ein schadhaftes Stück). Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der schadhaften Stücke pro Paket an und ist binomialverteilt nach $B(15;0,02)$. Im Prinzip wird nur die Wahrscheinlichkeit gesucht, mit der ein Paket ohne Berechnung bleiben muss.

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = \\ &= 1 - \binom{15}{0} \cdot 0,02^0 \cdot 0,98^{15} - \binom{15}{1} \cdot 0,02^1 \cdot 0,98^{14} - \binom{15}{2} \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^{13} = 0,304\% \end{aligned}$$

Weitere Übungen: S.86/9, 10, 11