Übungen zur beurteilenden Statistik

S. 109/ 2

Nach Umstellung im Produktionsgang eines Werkstücks vermutet der Hersteller, den Ausschussanteil auf höchstens 3% reduziert zu haben.

Diese Vermutung soll an 100 Werkstücken überprüft werden.

(a) Nennen Sie eine sinnvolle Nullhypothese und die Gegenhypothese. Welcher Test wird verwendet?

(b) Geben Sie den Ablehnungsbereich für das Signifikanzniveau 5% an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1.Art? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2.Art, wenn in Wirklichkeit der Ausschussanteil 4% (5%, 6%) beträgt?

1. Zunächst legen wir die Testgröße X und des Stichprobenumfangs n fest:
   Unsere Testgröße ist X und soll die Anzahl der Ausschussanteile angeben, die offensichtlich binomialverteilt nach $B(100;0,03)$ ist.
2. Die Nullhypothese $H_0: p = 0,03$ bzw. nach der Aufgabenstellung eigentlich $H_0: p \leq 0,03$ gibt an, welche Verteilung der Ausschussstücke eigentlich überprüft werden soll. Die Gegenhypothese $H_1: p > 0,03$ gibt im Prinzip nur die gegenteilige Aussage zur Nullhypothese an.
3. Das Signifikanzniveau von 5% gibt an, welche Obergrenze man für einen Fehler 1. Art (also die Ablehnung der Nullhypothese, obwohl diese richtig ist) zu akzeptieren bereit ist. Dieses Signifikanzniveau gibt nun an, wie die Entscheidungsregel zu formulieren ist, was genau bedeutet, den kritischen Bereich, der angibt, ab welcher Zahl von Ausschussstücken die Nullhypothese abgelehnt werden sollte, festzulegen. Verwendet die Gegenhypothese „>“ suchen wir den „rechten“ Bereich des Intervalls [0;n] ab einer zu bestimmenden Zahl g. Wir sprechen von einem „rechtsseitigen“ Signifikanztest: $K = \{g; g+1; g+2; ...; n\}$.

   Dabei hilft nun folgendes Vorgehen:

   $B(100;0,03;X \geq g) \leq 0,05 \Leftrightarrow 1 - B(100;0,03;X < g) \leq 0,05 \Leftrightarrow B(100;0,03;X < g) \geq 0,95$

   Damit lässt sich der letzte Term umformen zu: $B(100;0,03;X \leq g-1) \geq 0,95$ und mit Hilfe der Tabelle auf S.10 ergibt sich:

   $B(100;0,03;X \leq g-1) = B(100;0,03;X \leq 6) = 0,96877 \geq 0,95$.

   Damit ist also: $g-1 = 6 \Leftrightarrow g = 7$ und der kritische Bereich ist: $K = \{7;8;...;100\}$.

   Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn $X \geq 7$.

4. Der Fehler 1.Art gibt die Wahrscheinlichkeit an, die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie wahr ist. Konkret bedeutet das, mindestens 7 Ausschussstücke unter 100 zu haben: $B(100;0,03;X \geq 7) = 1 - B(100;0,03;X \leq 6) = 1 - 0,96877 = 3,123\%$.
5. Der Fehler 2.Art gibt die Wahrscheinlichkeit an, die Nullhypothese nicht abzulehnen, obwohl sie falsch ist: Wir untersuchen hierbei nur den „wirklichen" Anteil der Ausschussstücke von 4% bzw. 5% und dabei den Fall, dass wir weniger als 7 Ausschussstücke erhalten, denn das ist ja unser Annahmebereich: $B(100;0,04;X \leq 6) = 0,89361$ bzw. $B(100;0,05;X \leq 6) = 0,76601$

S.109/3

(a) Beschreiben Sie, wie mit einem Bernoulli-Experiment ein rechtsseitiger Signifikanztest auf dem Signifikanzniveau von 5% mit dem Stichprobenumfang 200 für die Nullhypothese $H_0: p = 0,3$ durchgeführt wird.

Nullhypothese ist formuliert: $H_0: p = 0,3$, die Gegenhypothese muss $H_1: p > 0,3$ sein, da es sich um einen rechtsseitigen Signifikanztest handelt. Damit folgt für den kritischen Bereich: $K = \{g; g+1; g+2; ...; n\}$.

X ist unsere Testgröße, die binomialverteilt ist nach $B(200; 0,3)$.

Damit folgt für die Entscheidungsregel (also die Konstruktion des kritischen Bereichs):

$$B(200; 0,3; X \geq g) \leq 0,05 \Leftrightarrow 1 - B(200; 0,3; X \leq g-1) \leq 0,05 \Leftrightarrow B(200; 0,3; X \leq g-1) \geq 0,95$$

nach Tabelle auf S. 19: $B(200; 0,3; X \leq g-1) = B(200; 0,3; X \leq 71) = 0,96037 \geq 0,95$

Damit ist $g - 1 = 71 \Leftrightarrow g = 72$ und der kritische Bereich: $K = \{72; 73; ...; 100\}$

(b) Wie entscheiden Sie bei einem Stichprobenergebnis von 85 Treffern?

Bei einem Stichprobenergebnis von 85 Treffern müsste die Nullhypothese abgelehnt werden.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1.Art?

Der Fehler 1.Art ist demnach:

$$B(200; 0,3; X \geq 72) = 1 - B(200; 0,3; X \leq 71) = 1 - 0,96037 = 3,963\%$$

S. 109/5

Alexandra hat ein Glücksrad gebaut, bei dem ein Viertel blau, die anderen drei Viertel rosa gefärbt sind. Yannick behauptet, dass das Rad eiert und dass daher Blau mit geringerer Wahrscheinlichkeit als ¼ erscheint. Yannick führt einen Signifikanztest auf dem Signifikanzniveau von 5% durch, um seine Behauptung zu überprüfen.

(a) Der Stichprobenumfang beträgt 100. Bei welchen Stichprobenergebnissen sieht Yannick seine Behauptung bestätigt?

Nullhypothese: $H_0: p = 0,25$; Gegenhypothese: $H_1: p < 0,25$

Kritischer Bereich des linksseitigen Signifikanztests: $K = \{0;...;g\}$ mit Testgröße X, die binomialverteilt mit $B(100;0,25)$ ist: Daher gilt:

$B(100;0,25;X \le g) \le 0,05 \Leftrightarrow B(100;0,25;X \le 17) = 0,03763 \le 0,05$, also $g = 17$ und der kritische Bereich (=Ablehnungsbereich) ist: $K = \{0;...;17\}$

Yannick sieht seine Behauptung bestätigt, wenn es höchstens 17-mal Blau gibt.

(b) Wie ist bei dem Test zu entscheiden, wenn man 200-mal dreht und 64-mal Blau erscheint?

$B(200;0,25;X \le g) \le 0,05 \Leftrightarrow B(200;0,25;X \le 39) = 0,04050 \le 0,05$. Der Ablehnungsbereich ist hierbei: $K = \{0;...;39\}$. Bei 64-mal Blau kann man die Nullhypothese nicht ablehnen, also geht man von einer Wahrscheinlichkeit aus, die nicht kleiner als ¼ ist.