**S. 132/2**

$$E:\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Normalenform der Gleichung von E in Vektordarstellung und in Koordinatendarstellung:

Berechnung des Normalenvektors über das Vektorprodukt:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-(-10)\\0-8\\-5-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-8\\-5\end{pmatrix}$$

Aufstellen der Normalenform in Vektordarstellung: $E:\begin{pmatrix}10\\-8\\-5\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}\right]=0$ bzw. in

Koordinatenform: $E:10x_1-8x_2-5x_3-19=0$.

Bis dahin müsste Euch noch alles bekannt sein! Jetzt kommt die Hesse´sche Normalenform ins Spiel:

b) Geben Sie die Hesse´sche Normalenform von E in Koordinatendarstellung an.

Zunächst berechnen wir die Länge des Normalenvektors über die bekannte Formel:

$$\left|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\quad\left|\begin{pmatrix}10\\-8\\-5\end{pmatrix}\right|=\sqrt{10^2+(-8)^2+(-5)^2}=\sqrt{189}=\sqrt{9\cdot 21}=3\sqrt{21}\approx 13,75$$

Damit ergibt sich direkt die Hesse´sche Normalenform (HNF) aus der Normalenform von E wie folgt:

$E_{HNF}:\dfrac{10x_1-8x_2-5x_3-19}{3\sqrt{21}}=0$. Man achtet zudem immer darauf, dass das Vorzeichen vor der einzigen Zahl im Zähler ohne Variable negativ ist, damit der Normaleneinheitsvektor „richtig“ gerichtet ist. Ggf. muss man noch mit (-1) durchmultiplizieren!

c) Prüfen Sie, ob die Gerade AB durch die Punkte $A(2|-2|1)$ und $B(3|1|1)$ in E liegt.

Zunächst ermitteln wir die Parameterform der Geradengleichung von AB:

$$g:\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3-2\\1-(-2)\\1-1\end{pmatrix}\Rightarrow g:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

Nun setzen wir die Zeilen dieser Geradengleichung jeweils für die betreffenden $x_i$ in die Normalenform der Ebenengleichung von E ein:

$$10\cdot(2+1\cdot\lambda)-8\cdot(-2+3\cdot\lambda)-5\cdot(1+0\cdot\lambda)-19=20+10\lambda+16-24\lambda-5-19=12-14\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{6}{7}$$

Mit Hilfe der Geradengleichung ergibt sich nun sogar der Durchstoßpunkt S der Geraden AB durch die Ebene E:

$$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+\frac{6}{7}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{6}{7}\\\frac{4}{7}\\1\end{pmatrix}\Rightarrow S\left(2\frac{6}{7}\,|\,\frac{4}{7}\,|\,0\right)$$

Diese Teilaufgabe lässt sich auch lösen, indem wir die Koordinaten der beiden Punkte A und b jeweils in die Normalenform der Ebene in Koordinatendarstellung einsetzen und prüfen, ob die Punkte in E liegen: z.B. für A: $10\cdot 2-8\cdot(-2)-5\cdot 1-19=12\neq 0\Rightarrow A\notin E$, analog für $B\notin E$.