Funktionsdiskussion einer verknüpften Funktion

S.168/4

$$f(x) = -2e^x \cdot \left(x^2 + 2x\right)$$

(a) Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^x \cdot \left(x^2 + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x + 2\right) = 0 \Rightarrow x_{N_1} = 0; x_{N_2} = -2$$

(b) Ableitung(en):

$$f'(x) = -2e^x \cdot \left(x^2 + 2x\right) - 2e^x \cdot \left(2x + 2\right) = -2e^x \cdot \left(x^2 + 4x + 2\right)$$

$$f''(x) = -2e^x \cdot \left(x^2 + 4x + 2\right) - 2e^x \cdot \left(2x + 4\right) = -2e^x \cdot \left(x^2 + 6x + 6\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow x_{E_{1,2}} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x_{E_1} = -2 + \sqrt{2} \approx -0,59; \; x_{E_2} = -2 - \sqrt{2} \approx -3,41$$

Wegen $f''(x_{E_1}) < 0 \Rightarrow x_{E_1}\ ist\ Maximum$ und $f''(x_{E_2}) > 0 \Rightarrow x_{E_1}\ ist\ Minimum$.

Hochpunkt $HP\left(2 + \sqrt{2} \,|\approx 0,92\right)$ und Tiefpunkt: $TP\left(2 - \sqrt{2} \,|\approx -0,32\right)$

(c) Wendepunkt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 6 = 0 \Rightarrow x_{W_{1,2}} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 24}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x_{W_1} = -3 + \sqrt{3} \approx -1,27; \; x_{W_2} = -3 - \sqrt{3} \approx -4,73$$

Mit Hilfe der dritten Ableitung erkennt man, dass beide Stellen Wendestellen sind:

$f'''(x) = -2e^x \cdot \left(x^2 + 6x + 6\right) - 2e^x \cdot \left(2x + 6\right) = -2e^x \cdot \left(x^2 + 8x + 12\right)$, wegen $f'''(x_{W_{1,2}}) \neq 0$.

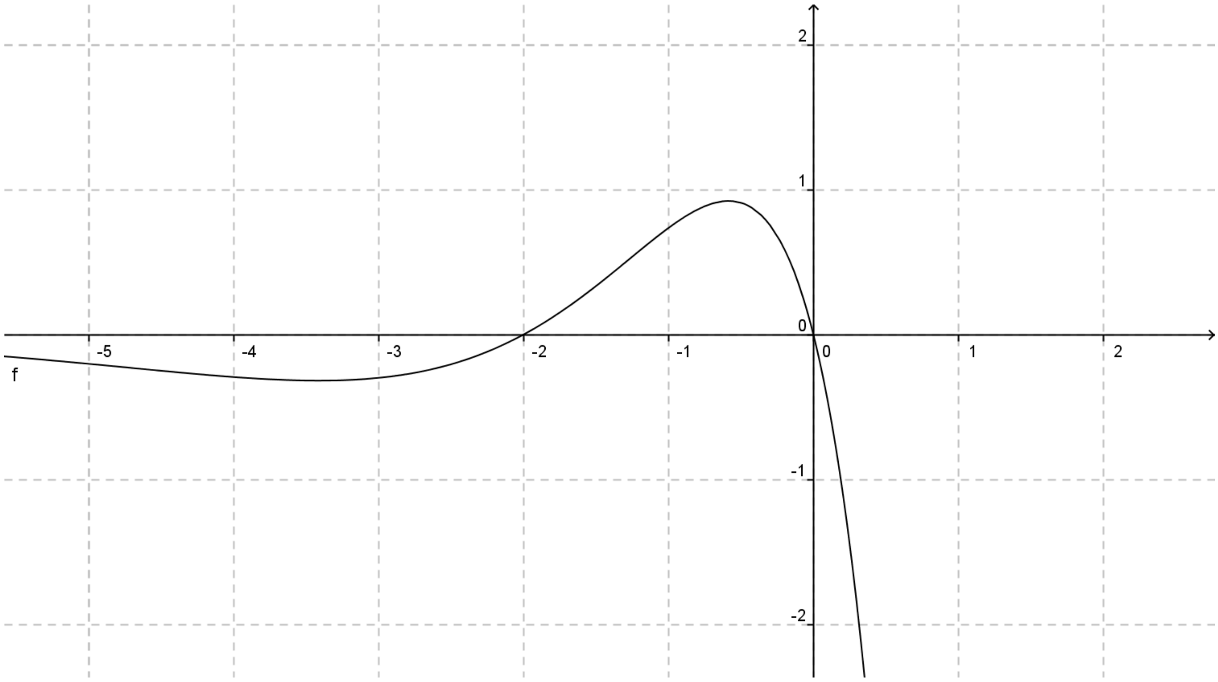
Damit sind Wendepunkte: $WP_1\left(-3 - \sqrt{3} \,|\approx -0,23\right)$ und $WP_2\left(-3 + \sqrt{3} \,|\approx 0,52\right)$.

(d) Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(-2 \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\left(x^2 + 2x\right)}_{\to +\infty} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-2 \underbrace{e^x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(x^2 + 2x\right)}_{\to +\infty} \right) = 0$$

Skizze:



(e) Stammfunktion: $F'(x) = f(x)$

$$F(x) = -2x^2 \cdot e^x \Rightarrow F'(x) = -4x \cdot e^x - 2x^2 \cdot e^x = -2e^x \cdot \left(2x + x^2\right) = f(x)\ q.e.d.$$

(f) Flächeninhalt der zwischen Graph und x-Achse gelegenen Fläche:

$$A = \int_{-2}^{0} -2e^x \cdot \left(x^2 + 2x\right) dx = \left[-2x^2 \cdot e^x\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(-8e^{-2}\right) = 8e^{-2} \approx 1{,}08\,FE$$

(g) Berechnung eines uneigentlichen Integrals:

$$A_k = \int_{k}^{-2} -2e^x \cdot \left(x^2 + 2x\right) dx = \left[-2x^2 \cdot e^x\right]_{k}^{-2} = -8 \cdot e^{-2} - \left(-2k^2 \cdot e^k\right)$$

$$\lim_{k \to -\infty} \left(-8 \cdot e^{-2} - \underbrace{\left(-2k^2 \cdot e^k\right)}_{\to 0} \right) = -8 \cdot e^{-2} \approx -1{,}08$$