1. Integralrechnung

1.1. Lokale Änderungsrate und Gesamtänderung

Ist der Verlauf der lokalen (momentanen) Änderungsrate einer Größe durch ihren Graphen gegeben, so kann man die Gesamtänderung der Größe in einem Intervall $[a;b]$ als Maßzahl des Flächeninhalts A zwischen dem Graphen und der x-Achse innerhalb des Intervalls deuten und somit ermitteln.

1.2. Das Integral

Definition:

Die Funktion f mit $f(x) \geq 0$ sein auf dem Intervall $[a;b]$ definiert. Dann nennt man den gemeinsamen Grenzwert $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} O_n$ von Unter- und Obersumme das Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b.
Dieser gemeinsame Grenzwert entspricht von seinem Wert her dem Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[a;b]$.

Wir schreiben dafür: $\int_a^b f(x)dx$ *(lies: Integral von f(x) dx von a bis b).*

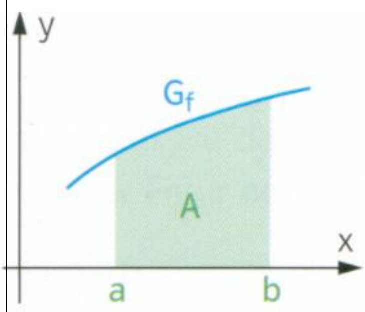
1.3. Das Integral als Flächenbilanz; die Integralfunktion

Satz:

Für eine Funktion f, die in einem Intervall $[a;b]$ definiert ist, gilt:

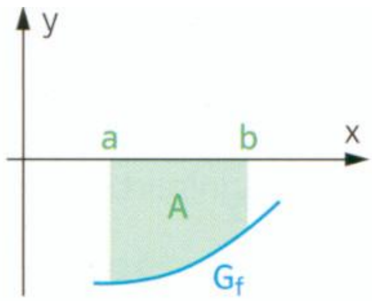
Falls

$f(x) > 0$ für alle $x \in [a;b]$:



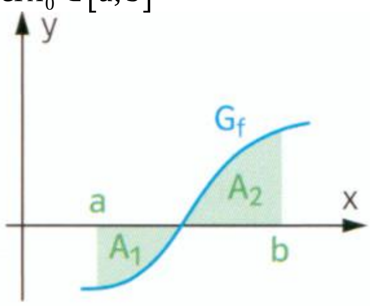
$\int_a^b f(x)dx = A > 0$

$f(x) < 0$ für alle $x \in [a;b]$



$\int_a^b f(x)dx = -A < 0$

$f(x_0) = 0$ und Vorzeichenwechsel von $f(x)$ bei $x_0 \in [a;b]$



$$\int_a^b f(x)dx = -A_1 + A_2 \begin{cases} > 0, \text{falls } A_1 < A_2 \\ < 0, \text{falls } A_1 > A_2 \end{cases}$$

Definition:

Die Funktion $f: t \mapsto f(t)$ sei mit ihrem Definitionsbereich D_f gegeben. Dann heißt für $a \in D_f$ die Funktion $I_a: x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ **Integralfunktion** von f zur unteren Grenze a.

1.4. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Funktion $f: t \mapsto f(t)$ sei im Intervall $[a;b]$ definiert.

Dann gilt für die Integralfunktion $I_a: x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$:

$$I_a'(x) = f(x) \text{ für } x \in [a;b].$$

Kurz: Die **Integralfunktion** I_a von f ist eine **Stammfunktion** von f.

Bemerkung: Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation.

Satz (Berechnung von Integralen):

Die Funktion f sei in dem Intervall $[a;b]$ definiert.

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f in diesem Intervall, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1.5. Stammfunktionen

Stammfunktionen: Eine kleine Übersicht

f(x)	x^n	x^2	x	1	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	e^x	$\ln x$
F(x)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}; n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{2}x^2$	x	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$x \cdot \ln x - x$

Skizzieren von Stammfunktionen:

Um bei gegebenem Graphen G_f einer Funktion f den Graphen einer Stammfunktion von f zu skizzieren, nutzt man charakteristische Punkte des Graphen von f, wie Null- und Extremstellen, und beachtet Vorzeichenbereiche von G_f.

1.6. Eigenschaften von Stammfunktionen und Integralen

Satz:

Sind G und H jeweils Stammfunktionen von g und h, so gilt für alle $c \in \mathbb{R}$:

Ist $f: x \mapsto c \cdot g(x)$ bzw. $f: x \mapsto g(x) + h(x)$, so ist

$F: x \mapsto c \cdot G(x)$ bzw. $F: x \mapsto G(x) + H(x)$ eine mögliche Stammfunktion.

Satz:

Sind die Funktionen f und g auf einem Intervall I definiert, dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,.$$

1.7. Flächenberechnungen mit dem Integral

Vorgehen bei der Berechnung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse über dem Intervall $[a;b]$:

1. Bestimmen der Nullstellen von f.
2. Ermitteln des Vorzeichens der Funktionswerte $f(x)$ in den Teilintervallen, d.h. ermitteln, ob das jeweilige Flächenstück unterhalb oder oberhalb der x-Achse liegt.
3. Berechnen der Inhalte der Teilflächen und Addieren der Werte.

Satz:

Für den Inhalt A der Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g, die sich im Intervall $[a;b]$ nicht schneiden, und den Grenzen $x = a$ und $x = b$ gilt:

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \right|.$$

Vorgehen bei der Berechnung des Flächeninhalts zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g über dem Intervall $[a;b]$:

1. Bestimmen aller Schnittstellen $z_1, z_2, ..., z_n$ der beiden Graphen in $[a;b]$.
2. Berechnen der Inhalte der Teilflächen über $[a;z_1], [z_1, z_2], ..., [z_n, b]$ und Addieren der Werte.

1.8. Ins Unendliche reichende Flächen

Definition:

Existiert für eine im Intervall $[a;+\infty[$ bzw. $]a;b]$ definierte Funktion f

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{z\to a}\int_z^b f(x)dx\ ,$$

so heißt dieser Grenzwert das **uneigentliche Integral** über dem betreffenden Intervall.