# 2. Weitere Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen

## 2.1. Die zweite Ableitung

***Definition:***

Ist die Ableitung $f'$ einer Funktion f differenzierbar, so erhält man durch Ableiten von $f'$ die zweite Ableitung $f''$.

Analog können auch höhere Ableitungen ($f''', f^{(4)}$, usw.) definiert werden.

## 2.2. Krümmung von Graphen

***Definition:***

Bewegt man sich auf dem Graphen einer Funktion f in positiver x-Richtung und beschreibt man dabei eine Rechtskurve (Linkskurve), so heißt der Graph in diesem Bereich **rechtsgekrümmt** (**linksgekrümmt**).

**Kriterien für das Krümmungsverhalten:**

**Kriterium mithilfe der ersten Ableitung:**

Für eine differenzierbare Funktion f gilt:

Wenn $f'$ in einem Intervall streng monoton

- zunehmend ist, dann ist der Graph von f dort linksgekrümmt,
- abnehmend ist, dann ist der Graph von f dort rechtsgekrümmt.

**Kriterium mithilfe der zweiten Ableitung:**

Für eine zweimal differenzierbare Funktion f gilt:

- Wenn $f''(x) > 0$ in einem Intervall I ist, dann ist der Graph von f dort linksgekrümmt.
- Wenn $f''(x) < 0$ in einem Intervall I ist, dann ist der Graph von f dort rechtsgekrümmt.

## 2.3. Wendepunkte, Art der Extrema

***Definition:***

Die Funktion f sei in einem Intervall I differenzierbar.

Eine Stelle $x_0 \in I$, bei der der Graph von f von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung (oder umgekehrt) übergeht, heißt **Wendestelle** von f.

Der zugehörige Punkt $W\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$ heißt **Wendepunkt**.

Die Tangente an den Graphen im Wendepunkt heißt **Wendetangente** und durchsetzt den Graphen von f.

**<u>Satz: (Kriterium für Wendestellen und Extrema)</u>**

Die Funktion f sei in einem Intervall I zweimal differenzierbar und $x_0 \in I$.

- Wenn $f''(x_0) = 0$ und $f''$ bei $x_0$ einen Vorzeichenwechsel hat, dann hat die Funktion f an der Stelle $x_0$ eine **Wendestelle**.
- Wenn $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f''$ bei $x_0$ einen Vorzeichenwechsel hat, dann hat die Funktion f bei $P(x_0 \mid f(x_0))$ einen **Terrassenpunkt**. Die Wendetangente im Terrassenpunkt ist parallel zur x-Achse, d.h. waagerecht.
- Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist, dann hat f an der Stelle $x_0$ ein lokales **Maximum**.
- Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist, dann hat f an der Stelle $x_0$ ein lokales **Minimum**.

***<u>Beachte:</u>***

Gilt für eine Stelle $x_0 \in I$: $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ (d.h., das obige Kriterium für Extrema ist nicht erfüllt), darf nicht gefolgert werden, dass f kein Extremum hat, z.B. bei $f: x \mapsto x^4$.
Hier untersucht man wie bisher, ob $f'$ in einer Umgebung von $x_0$ einen Vorzeichenwechsel hat.

***<u>Übungen:</u>*** *(aus: Fokus Mathematik 12, S.121-122, teilweise verändert)*

*<u>Aufgabe 1:</u>*

Untersuchen Sie die Funktion $f: x \mapsto \frac{6}{5}x^5 - x^3 - x$ bzw. ihren Graphen auf Definitionsbereich, Monotonie, Krümmungsverhalten, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte. Skizzieren Sie anschließend den Graphen der Funktion.

*<u>Aufgabe 2:</u>*

Berechnen Sie die Extrempunkte der Funktion f mit $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2}$ und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. Treffen Sie ohne weitere Rechnung Aussagen über das Krümmungsverhalten und die Existenz von Wendepunkten des Graphen von f.

*<u>Aufgabe 3:</u>*

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f. Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion $g: x \mapsto 2 - f(x)$ aus dem Graphen von f entsteht. Skizzieren Sie den Graphen von g.

(c) Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangenten der Graphen von f und von g.