3. Zufallsgrößen und Binomialverteilung

3.1. Zufallsgrößen

Definition:

Eine Funktion X, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt Zufallsgröße oder Zufallsvariable auf Ω.

Notiert: $X: \omega \mapsto X(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$ und $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

3.2. Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

Definition:

Die Funktion, die jedem Wert $x_i \left(i = 1, 2, ..., n\right)$ einer Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeit $P\left(X = x_i\right)$ zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X oder Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X bzw. kurz Verteilung von X.

Definition:

Die Funktion F, die bei gegebener Zufallsgröße X jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P\left(X \leq x\right)$ zuordnet, heißt kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X.

Notiert: $F: x \mapsto P\left(X \leq x\right)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $P\left(X \leq x\right) \in \left[0;1\right]$.

3.3. Erwartungswert einer Zufallsgröße

Definition

Ist X eine Zufallsgröße, deren mögliche Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ sind, so heißt die reelle Zahl $E(X)$ mit $E(X) = x_1 \cdot P\left(X = x_1\right) + x_2 \cdot P\left(X = x_2\right) + ... + x_n \cdot P\left(X = x_n\right)$ Erwartungswert der Zufallsgröße X.

3.4. Varianz einer Zufallsgröße

Definition

Ist X eine Zufallsgröße, deren mögliche Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ sind und die den Erwartungswert $E(X) = \mu$ hat,, so heißt die reelle Zahl $Var(X)$ mit

$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + ... + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$ die **Varianz** der Zufallsgröße X.

<u>Beachte</u>: Die Varianz ist eine Kenngröße für die Streuung der Werte x_i der Zufallsgröße X um ihren Erwartungswert μ.

Definition: Die reelle Zahl $\sqrt{Var(X)}$ heißt **Standardabweichung** der Zufallsgröße X.

Oft schreibt man auch $\sigma = \sqrt{Var(X)}$. Damit gilt dann $\sigma^2 = Var(X)$.

<u>Beachte</u>: Die Standardabweichung versucht das Problem zu beheben, dass die Varianz nicht in der Einheit der Maßzahl der Größe angegeben, für die die Zufallsvariable X steht, sondern in „Einheit^2“. Die Standardabweichung ist dann wieder in der „passenden“ Einheit.

3.5. Ziehen aus einer Urne mit Beachtung der Reihenfolge

Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge und mit Zurücklegen

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln wird k-mal eine Kugel **mit Zurücklegen** gezogen. Die gezogenen Kugeln werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert.

Dann sind n^k verschiedene Ergebnisse (k-Tupel) möglich.

Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge und mit Zurücklegen

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln wird k-mal eine Kugel **ohne Zurücklegen** gezogen und in der Reihenfolge der Ziehens notiert.

Dann sind $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ verschiedene Ergebnisse möglich.

Werden alle Kugeln nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen, so ist $k = n$. Die Anzahl der unterschiedlichen Reihenfolgen gibt dann an, auf wie viele verschiedene Arten n Elemente angeordnet werden können. Jede Anordnung bezeichnet man auch als eine **Permutation** der n Elemente.

Die Anzahl der Permutationen von n Elementen beträgt damit $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$.

(sprich: n Fakultät)

3.6. Ziehen aus einer Urne mit einem Griff

Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden k Kugeln mit einem Griff, d.h. ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, gezogen.

Dann gibt es $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ mögliche Ergebnisse.

Definition:

Für $k\in\mathbb{N}$ und $k\le n$ heißt $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ **Binomialkoeffizient** *(sprich: „n über k“).*

Satz:

Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen S schwarz sind, werden n Kugeln mit einem Griff, d.h. ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln an.

$$\text{Dann gilt: } P(X=s)=\frac{\binom{S}{s}\cdot\binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}.$$

Beachte: Zerlege die Menge der Kugeln in zwei Teilmengen (S Schwarze und N Nicht-Schwarze). Damit ist die obere Zahl in beiden Binomialkoeffizienten des Zählers festgelegt. Die „untere“ Zahl des Binomialkoeffizienten ist danach nichts anderes als ein Wert, den die Zufallsvariable X annehmen kann und die von 0 bis S gehen kann.

3.7. Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette

Definition:

Ein Zufallsexperiment mit nur zwei Ergebnissen heißt Bernoulli-Experiment. Die Wahrscheinlichkeit für Treffer wird mit p, die für Niete mit q bezeichnet, wobei $q=1-p$ ist.

Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments besteht, heißt Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter p.

3.8. Binomialverteilung

Satz (Formel von Bernoulli):

Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer an.

Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer mit $k \in \{0;1;...;n\}$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}.$$

Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X heißt **binomialverteilt** nach $B(n;p)$ oder $B_{n;p}$, wenn gilt:

- X kann die Werte 0; 1; 2; …; n annehmen.
- $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ mit $0 \le p \le 1$.

Die **kumulative Verteilungsfunktion** einer nach $B(n;p)$ verteilten Zufallsgröße wird häufig mit F_p^n bezeichnet. Entsprechend bezeichnet man: $F_p^n(x)=P(X\le x)=\sum B(n;p;k)$.

3.9. Modellieren mit der Binomialverteilung

Vorgehen beim Modellieren mit der Binomialverteilung

1. Prüfe, ob das Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Wahrscheinlichkeit p für Treffer angesehen werden kann.
2. Falls ja, definiere die $B(n;p)$-verteilte Zufallsgröße X.
3. Bestimme die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung.

3.10. Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

***Satz*:**

Eine $B(n;p)$-verteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = E(X) = n\cdot p$ und die Varianz $\sigma^2 = Var(X) = n\cdot p\cdot(1-p) = n\cdot p\cdot q$. Für die Standardabweichung σ gilt: $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q}$.