5. Geraden und Ebenen im Raum

5.1. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Definition:

Die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ heißen **linear abhängig**, wenn mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar ist.
Andernfalls heißen die Vektoren **linear unabhängig**.

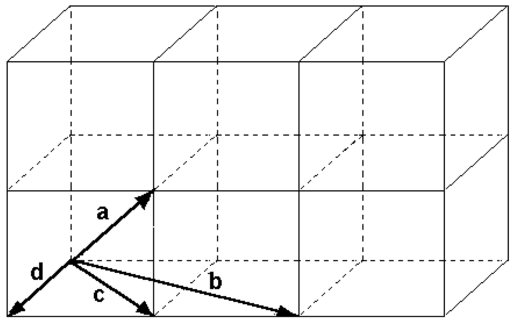
Satz:

Im $\mathbb{R}^2$ sind höchstens zwei Vektoren,
im $\mathbb{R}^3$ sind höchstens drei Vektoren,

linear unabhängig.

Jeder weitere Vektor lässt sich eindeutig als Linearkombination dieser linear unabhängigen Vektoren darstellen.

In der Grafik sind die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig, weil durch eine Linearkombination aus diesen drei Vektoren jeder andere Vektor im Raum dargestellt werden kann, so z.B. auch der Vektor $\vec{d}$.



Beachte:

Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig, wenn kein Vektor Vielfaches des anderen ist.
Lässt sich im $\mathbb{R}^3$ ein Vektor als Linearkombination von zwei anderen (linear unabhängigen) Vektoren darstellen, so nennt man alle drei Vektoren linear abhängig.

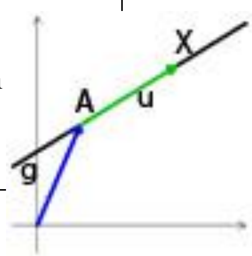
5.2. Vektorielle Darstellung von Geraden

Satz und Definition:

Jede Gerade g lässt sich durch eine Gleichung in der sogenannten **Parameterform**

$\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ mit dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ beschreiben.

Hierbei ist $\vec{A}$ der Ortsvektor eines Punktes der Geraden (Aufpunkt) und $\vec{u} \left(\vec{u} \neq \vec{o}\right)$ ein Richtungsvektor von g.



Merke: Die Schnittpunkte der Gerade mit den Koordinatenebenen nennt man **Spurpunkte**. Mit Hilfe dieser Spurpunkte lässt sich die Lage der Geraden im Raum bzw. Koordinatensystem leichter veranschaulichen.
Berechnung: Setze $x_1 = 0$ und bestimme in der Parameterform der Geraden λ. Damit berechne dann die Koordinaten des Spurpunktes mit der x_2x_3-Ebene. Verfahre dann mit den beiden anderen Ebenen genauso.

Die senkrechte Projektion P' eines Punktes $P(p_1 | p_2 | p_3)$ in die x_1x_2-Ebene erhält man als Schnittpunkt dieser Ebene mit der Parallelen zur x_3-Achse durch P. P' hat dann die Koordinaten $P'(p_1 | p_2 | 0)$. Für die Projektion einer Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ folgt also:

$$g_{12}: \vec{X} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.3. Gegenseitige Lage von Geraden

Im $\mathbb{R}^3$ können zwei Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$ in folgender Weise zueinander liegen:

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig, d.h. $\vec{v} = r \cdot \vec{u}$	$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig
$g = h$: Geraden sind identisch:	Geraden g und h schneiden sich in einem Punkt
$g \| h$: Geraden sind parallel	G und h sind windschief

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von Geraden setzt man die Parameterdarstellungen beider Geraden gleich und wandelt dies in ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten um. Zu Beginn sollte man allerdings immer prüfen, ob die beiden Richtungsvektoren linear abhängig sind, d.h. der eine als ein Vielfaches des anderen Vektors dargestellt werden kann. Ist dies der Fall, führt eine Punktprobe sehr schnell zum Ergebnis (z.B. den Aufpunkt des ersten Vektors prüfen, ob er auch auf der zweiten Geraden liegt.)

Prüfschema zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von zwei Geraden

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} \text{ und } h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$$

<table>
<tr><th colspan="4">Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig?</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ja</td><td colspan="2">nein</td></tr>
<tr><td colspan="2">g parallel zu h</td><td colspan="2">g nicht parallel zu h</td></tr>
<tr><td colspan="2">Liegt A auf h? (Punktprobe)</td><td colspan="2">Hat $\vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$ eine Lösung?</td></tr>
<tr><td>Ja</td><td>nein</td><td>ja</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>$g = h$</td><td>$g \parallel h$</td><td>g und h schneiden sich in einem Punkt S</td><td>g und h sind zueinander windschief</td></tr>
</table>

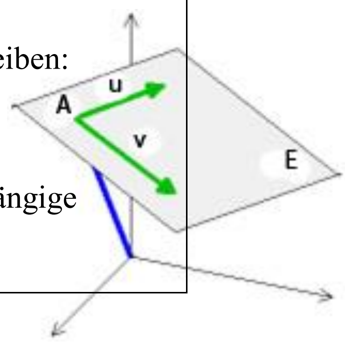
5.4. Vektorielle Darstellung von Ebenen

Satz und Definition:

Jede Ebene E lässt sich durch eine **Ebenengleichung in Parameterform** beschreiben:

$$E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \left(\lambda, \mu \in \mathbb{R}\right).$$

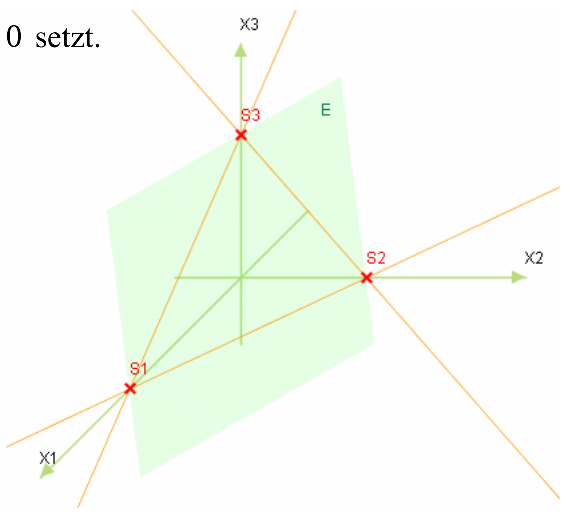
Hierbei ist $\vec{A}$ der Ortsvektor eines Aufpunktes. $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind zwei linear unabhängige Richtungsvektoren.



Ist die Ebene E durch drei Punkte A, B und C gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen, so kann man z.B. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren wählen.

Um die Lage der Ebene E im Koordinatensystem zu veranschaulichen, bestimmt man die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen und zeichnet die Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen, die sogenannten **Spurgeraden** der Ebene.

Den Schnittpunkt der Ebene z.B. mit der x_1-Achse erhält man, indem man in der Parametergleichung von E gleichzeitig $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ setzt.



5.5. Normalenform der Ebenengleichung

Satz und Definition

Jede Ebene lässt sich durch eine Ebenengleichung in Normalenform beschreiben:

Ist die Ebene E durch einen Aufpunkt A und einen Normalenvektor $\vec{n}$ festgelegt, so unterscheidet man folgende Darstellungen der Normalenform:

Vektordarstellung: $\vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$

Koordinatendarstellung: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$ mit $n_0 = -\left(n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3\right)$.

Ist die Ebenengleichung in Parameterform gegeben durch $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \left(\lambda, \mu \in \mathbb{R}\right)$, so liefert das Vektorprodukt $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ einen Normalenvektor.

Definition (Hesse´sche Normalenform der Ebenengleichung):

Vektordarstellung: $\overrightarrow{n_0} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$

Dabei ist der Einheitsvektor $\overrightarrow{n_0}$ zu $\vec{n}$ so gerichtet, dass $\overrightarrow{n_0} \circ \vec{A} > 0$ ist, d.h. der Winkel zwischen $\vec{A}$ und $\overrightarrow{n_0}$ ist spitz.

Koordinatendarstellung: $\dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0}{\pm\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$.

Dabei ist das Vorzeichen vor der Wurzel so zu wählen, dass $\dfrac{n_0}{\pm\sqrt{\left(\vec{n}\right)^2}} < 0$ wird.

5.6. Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

Satz:

Die gegenseitige Lage der Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und der Ebene $E: \vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{B}\right) = 0$ lässt sich bestimmen, indem man die Anzahl der gemeinsamen Punkte von g und E untersucht.

Setzt man den Ortsvektor $\vec{X}$ aus der Gleichung für g in die Normalengleichung für E ein, so erhält man die Gleichung:

$$\vec{n} \circ \left[\left(\vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}\right) - \vec{B}\right] = 0$$

zur Bestimmung der Parameterwerte für die gemeinsamen Punkte.

Hat diese Gleichung genau eine Lösung, dann schneiden sich g und E in einem Punkt.

Gilt insbesondere $\vec{u} = r \cdot \vec{n}$ (mit einem $r \in \mathbb{R}$), so ist g senkrecht zu E.

Hat diese Gleichung keine Lösung, so sind g und E parallel.

Hat diese Gleichung unendlich viele Lösungen, so liegt g in E.

5.7. Gegenseitige Lage von Ebenen

Um die gegenseitige Lage der in Normalenform gegebenen Ebenen $E : \vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$ und $F : \vec{m} \circ \left(\vec{X} - \vec{B}\right) = 0$ zu untersuchen, kann man folgendermaßen vorgehen:

<table>
<tr><td colspan="3">Sind die Normalenvektoren $\vec{n}$ und $\vec{m}$ linear abhängig?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ja</td><td>nein</td></tr>
<tr><td colspan="2">$E \parallel F$</td><td rowspan="4">E und F schneiden sich in einer Geraden. Die gemeinsamen Punkte erhält man durch Lösen des Gleichungssystems aus den Koordinatendarstellungen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Haben E und F gemeinsame Punkte?</td></tr>
<tr><td>ja</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>$E = F$</td><td>$E \parallel F$ und $E \neq F$</td></tr>
</table>

Gegeben sind die beiden Ebenen $E : x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$ und $F : x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$.

(1) Die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich nicht linear abhängig.

(2) Nun gilt es das Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{llll} \text{(I)}\; x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0 & \text{(I)}\; x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0 & & \\ \text{(II)}\; x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 & \text{(II)}\; x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 & \text{II} - \text{I} & \text{(III)}\; 4x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \end{array}$$

Da dieses Gleichungssystem unterbestimmt ist (zwei Gleichungen mit drei Unbekannten), ist nun eine der beiden Variablen in (III) durch λ zu ersetzen. Wir wählen $\lambda = x_3$, was zu

$$\text{(III)}\; 4x_2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}.$$

Nun gilt es noch eine Gleichung aus (I) und (II) zu ermitteln, die nur x_1 und x_3 enthält:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)}\; x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0 & & \\ \text{(II)}\; x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 & \text{II} + \text{I} & \text{(III)}\; 2x_1 + 4x_3 - 10 = 0 \end{array}.$$ Mit $\lambda = x_3$ folgt nun:

$$\text{(III)}\; 2x_1 + 4\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2\lambda + 5.$$

(3) Der Lösungsvektor ist damit: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda + 5 \\ 0{,}5\lambda - 0{,}5 \\ \lambda \end{pmatrix}$, was zur Schnittgeraden g führt:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.8. Abstandsbestimmungen

(1) Abstand Punkt – Gerade

Um den Abstand d eines Punktes P von einer Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ zu berechnen, kann man so vorgehen:

1. Aufstellen der Gleichung einer Ebene E, die P enthält und senkrecht zu g ist: Vektordarstellung der Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{u}$ und dem Aufpunkt P.
2. Bestimmen des Schnittpunkts F der Ebene E mit der Geraden g: Einsetzen von g in die Normalenform der Ebenengleichung von E und Berechnung von λ, Einsetzen von λ in die Geradengleichung von g und Bestimmen der Koordinaten von F, also des Lotfußpunktes von g auf E.
3. Berechnen des Abstandes der Punkte P und F: Berechnen der Vektorlänge $\left|\overrightarrow{FP}\right|$.

(2) Abstand zweier paralleler Geraden

Wie unter (1), dabei kann der Abstand eines beliebigen Punktes der Geraden h von der Geraden g untersucht werden.

(3) Abstand zweier windschiefer Geraden

Den Abstand zweier windschiefer Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$ berechnet man folgendermaßen:

1. Man bestimmt zunächst eine Hilfsebene E, die g enthält und zu h parallel ist. Ihre Gleichung lautet in Normalenform: $E: \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$:

   Bilde also zunächst das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren und benutze den Aufpunkt von g als Aufpunkt der Ebene E.
2. Der Abstand der windschiefen Geraden g und h ist gleich dem Abstand des Aufpunktes B der Geraden h von der Ebene E. Es gilt: $d = \left| \frac{\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \circ \left(\vec{B} - \vec{A}\right)}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} \right|$:

   Bilde die HNF der Hilfsebene und setze den Aufpunkt B von h in die Abstandsformel der HNF ein.

Beispiel: (Nach Aufgabe S.144/13a)

Gegeben sind die Punkte A (-9 | 3 | -3), B (-3 | -6 | 0), C (-7 | 5 | 5) und D (4 | 8 | 0).
Berechnen Sie den Abstand der Geraden AB und CD

Lösung: Die Geraden $g:\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}-9\\3\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}6\\-9\\3\end{pmatrix}$ und $h:\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}-7\\5\\5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}11\\3\\-5\end{pmatrix}$ sind windschief

(wird hier nicht gezeigt!).

Für die Hilfsebene E, die g enthält und zu h parallel ist, muss man zunächst den Normalenvektor $\vec{n}$ mit Hilfe des Vektorprodukts der beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ermitteln:

$$\begin{pmatrix}6\\-9\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}11\\3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36\\63\\117\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}4\\7\\13\end{pmatrix}.$$

Als Aufpunkt wählt man den Aufpunkt A der Geraden g und bildet die Vektordarstellung der Ebene:

$E:\begin{pmatrix}4\\7\\13\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}-9\\3\\-3\end{pmatrix}\right]=0$ und damit die Koordinatendarstellung: $E:4x_1+7x_2+13x_3+54=0$.

Die HNF ergibt sich leicht zu $E:\frac{-4x_1-7x_2-13x_3-54}{3\sqrt{26}}=0$.

Der letzte Schritt ist es nun, die Koordinaten des Aufpunktes B von h in die Abstandsformel der HNF von E einzusetzen: $d\left(B,E\right)=\left|\frac{-4\cdot(-7)-7\cdot5-13\cdot5-54}{3\sqrt{26}}\right|=\left|\frac{-126}{3\sqrt{26}}\right|\approx 8,24LE$.

5.9. Schnittwinkel

Bestimmung des Schnittwinkels zwischen zwei Geraden

Der Schnittwinkel zweier Geraden $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{B} + \mu \cdot \vec{v}$ ist gleich dem spitzen Winkel α, den die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ festlegen.

Für den Winkel α gilt dann: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{u} \circ \vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}$.

Bestimmung des Schnittwinkels zwischen Gerade und Ebene

Um den Schnittwinkel α zwischen der Geraden $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und der Ebene $E: \vec{n} \circ \left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{B}\right) = 0$ zu ermitteln, berechnet man zunächst den spitzen Winkel β, den der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E einschließt.
Es gilt dann: $\alpha = 90° - \beta$.

Für die Winkel α und β gilt dann: $\sin\alpha = \cos\left(90° - \alpha\right) = \cos\beta = \dfrac{\left|\vec{u} \circ \vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}$

Bestimmung des Schnittwinkels zweier Ebenen

Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen $E_1: \overrightarrow{n_1} \circ \left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{A}\right) = 0$ und $E_2: \overrightarrow{n_2} \circ \left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{B}\right) = 0$ ist gleich dem spitzen Winkel α, den die Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ einschließen.

Für den Winkel α gilt dann: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.

Mathematik – Jahrgangsstufe 12

Übung: Nach S.148/4a: Berechnen Sie den Schnittwinkel den Ebenen $E_1: \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right] = 0$ und

$E_2: \begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}\right] = 0$.

Es genügt folgender Ansatz: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{30}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{37}} \approx 0{,}967 \Rightarrow \alpha \approx 14{,}71°$